

文章编号: 1005—0523(2006)01—0153—03

一类离散双险种风险模型的破产概率

狄育红, 刘再明

(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:研究了一类离散双险种风险模型, 对此模型得到了最终破产概率的一般表达式, Lundberg 不等式, 及当险种 II 的保费收取随机序列与两险种的个体索赔额均服从指数分布时的有限时间破产概率的上界估计.

关 键 词:双险种风险模型; 破产概率; 调节系数

中图分类号: F062.2

文献标识码: A

1 引言

经典风险模型描述的是单一险种风险过程, 随着保险公司业务规模的不断扩大, 经营单一险种对于保险公司来说是不符合实际的, 讨论多险种风险模型更能与保险公司实际运作相结合, 于是有人^{[3][4]}研究了连续时间的多险种风险模型, 本文则考虑了一类离散双险种风险模型, 其中两险种的保费到达计数过程为泊松随机序列(险种 I 的每次保费收入为常数, 险种 II 的每次保费收入不再为常数), 索赔到达分别为泊松随机序列和二项随机序列. 本文得到了此类风险模型的最终破产概率的一般表达式, Lundberg 不等式, 及当险种 II 的保费收取随机序列与两险种的个体索赔额均服从指数分布时的有限时间破产概率的上界估计.

2 模型的引入

设 $u > 0, c > 0$, 以下随机变量都定义在完备概率空间 $\{\Omega, \pi, \rho\}$ 上.

1) 险种 I, 保费到达过程 $\{M_1(n), n = 1, 2, \dots\}$ 是参数为 λ_1 的泊松随机序列, 且 $M_1(0) = 0$, 每次

保费收入为常数 c ; 险种 II; 保费到达过程 $\{M_2(n), n = 1, 2, \dots\}$ 是参数为 λ_2 的泊松随机序列, 且 $M_2(0) = 0$, 但每次收到的保费不再为常数, 而是一系列相互独立的随机序列, 记为 $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$

2) $\{X_i^{(1)}, i = 1, 2, \dots\}$ 是取值于 $\{0, \infty\}$ 的独立同分布随机变量序列; $\{X_i^{(2)}, i = 1, 2, \dots\}$ 是取值于 $(0, \infty)$ 的独立同分布随机变量序列

假定 $E(Y_i) = c_1, E(X_i^{(1)}) = L_1, E(X_i^{(2)}) = L_2$

3) $\{N_1(n), n = 1, 2, \dots\}$ 是具有参数为 $K (K > 0)$ 的泊松随机序列

4) $\{N_2(n), n = 1, 2, \dots\}$ 是具有参数为 $p (0 < p < 1)$ 的二项随机序列

$$\begin{aligned} \text{令 } U(n) = u + cM_1(n) + \sum_{i=1}^{M_2(n)} Y_i - \sum_{i=1}^{N_1(n)} X_i^{(1)} - \\ \sum_{i=1}^{N_2(n)} X_i^{(2)}, S(n) = cM_1(n) + \sum_{i=1}^{M_2(n)} Y_i - \sum_{i=1}^{N_1(n)} X_i^{(1)} - \\ \sum_{i=1}^{N_2(n)} X_i^{(2)} \end{aligned}$$

假定 $\{M_1(n), n = 1, 2, \dots\}, \{M_2(n), n = 1, 2, \dots\}, \{N_1(n), n = 1, 2, \dots\}, \{N_2(n), n = 1, 2, \dots\}, \{X_i^{(1)}, i = 1, 2, \dots\}, \{X_i^{(2)}, i = 1, 2, \dots\}$ 是相互独立的, 则 $\{U(n), n = 1, 2, \dots\}$ 即为我们所讨论的双险种风险模型.

收稿日期: 2005—04—25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371133).

作者简介: 狄育红(1981—), 女, 天津人, 硕士生, 主要从事保险风险随机模型的研究.

中国知网 <https://www.cnki.net>

模型的实际背景:

$u(u>0)$ 是初始资本;

$X_i^{(1)}$ 表示险种 I 第 i 次赔付量, $X_i^{(1)}$ 表示险种 II 第 i 次赔付量;

$N_1(n)$ 表示时间段 $(0, n]$ 内险种 I 赔付总次数,

$N_2(n)$ 表示时间段 $(0, n]$ 内险种 II 赔付总次数;

$U(n)$ 是公司在时刻 n 的盈余资本

为保证公司的稳定经营,假定单位时间内平均保费收入大于平均理赔额,即

$E[S(n)] = c\lambda_1 + \lambda_2 c_1 - KL_1 - pL_2 > 0$. 设 $T_u = \inf\{n: U(n) \leq 0\}$ 表示保险公司破产发生时刻(若对所有的 n , 均有 $U(n) \geq 0$, 则 $T_u = \infty$, 保险公司不会破产); 保险公司最终破产概率为 $\Psi(u) = Pr\{T_u < \infty | U(0) = u\}$

性质 2.1 盈利过程 $\{S(n), n=1, 2, \dots\}$ 具有平稳独立增量性

3 主要结果

定理 3.1 对于盈利过程 $\{S(n), n=1, 2, \dots\}$

1) 存在一个函数 $g(r)$, 使得 $E[\exp(-rS(n))] = \exp[ng(r)]$

2)
$$g(r) = \lambda_1(e^{-rc} - 1) + \lambda_2[M_Y(-r) - 1] + K[M_{X_1}(r) - 1] + 1n[pM_{X_2}(r) + q]$$

证明
$$E[\exp(-rS(n))] = E[\exp(-rcM_1(n)) \cdot E[\exp(-r \sum_{i=1}^{M_2(n)} Y_i)] \cdot E[r \sum_{i=1}^{N_1(n)} X_i^{(1)}] \cdot E[r \sum_{i=1}^{N_2(n)} X_i^{(2)}]]$$

$$= \exp\{\lambda_1 n(e^{-rc} - 1) + \lambda_2 n[M_Y(-r) - 1] + Kn[M_{X_1}(r) - 1]\} \cdot [pM_{X_2}(r) + q]^2$$

$$= \exp\{\lambda_1 n(e^{-rc} - 1) + \lambda_2 n[M_Y(-r) - 1] + Kn[M_{X_1}(r) - 1] + n1n[pM_{X_2}(r) + q]\}$$

令 $g(r) = \lambda_1(e^{-rc} - 1) + \lambda_2[M_Y(-r) - 1] + K[M_{X_1}(r) - 1] + 1n[pM_{X_2}(r) + q]$

得 $E[\exp(-rS(n))] = \exp[ng(r)]$

定理 3.2 方程 $g(r) = 0$ 在 $r > 0$ 有唯一正解 R , 并称此解为调节系数

证明 1) $r=0$ 时, 显然 $g(0)=0$

2)
$$g'(r) = \lambda_1 e^{-rc}(-c) + \lambda_2 E[-Y_i e^{-rY_i}] + KE[X_i^{(1)} e_i^{rX_i^{(1)}}] + \frac{pE[X_i^{(2)} e_i^{rX_i^{(2)}}]}{pM_{X_2}(r) + q}$$

$$g(r) = \lambda_1 c e^{-rc} + \lambda_2 E[Y_i e^{-rY_i}] + KE$$

$$\left[\begin{matrix} X_i^{(1)} e_i^{rX_i^{(1)}} \\ pE[X_i^{(2)} e_i^{rX_i^{(2)}}] \cdot [pM_{X_2}(r) + q] - p^2 [E[X_i^{(2)} e_i^{rX_i^{(2)}}]]^2 \end{matrix} \right] \cdot \frac{1}{[pM_{X_2}(r) + q]^2} +$$

在 $r=0$ 处, $g'(r)|_{r=0} = -c\lambda_1 - \lambda_2 c_1 + KL_1 + pL_2 < 0$, 由 Schwarz 不等式知 $g''(r) > 0$, 故曲线在 $r > 0$ 是下凹的, 所以只要 r 取足够大值, 一阶导数将大于零, 因此 $g(r) = 0$ 在 $(0, \infty)$ 存在唯一正解, 记为 R , 称之为调节系数.

定义 3.3 对于随机过程 $\{S(n), n=1, 2, \dots\}$ 定义事件域 $F^s = (F_n^s, n \geq 0)$, 其中 $F_n^s = \sigma\{S(k), k \geq n\}$

引理 3.4 $\{M_u(n), F_n^s; n \geq 0\}$ 是鞅, 其中 $M_u(n) = \frac{\exp[-r(u + S(n))]}{\exp[ng(r)]}$

定理 3.5 在风险过程 $\{U(n), n=1, 2, \dots\}$ 下, 设 R 为调节系数, 则最终破产概率为 $\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-R \cdot U(T_u)) | T_u < \infty]}$

证明
$$\exp\{-Ru\} = M_u(0) = E^{F_0}[M_u(n \wedge t_u)] = E^{F_0}[M_u(n \wedge T_u) | T_u \leq n] P^{F_0}(T_u \leq n) + E^{F_0}[M_u(n \wedge T_u) | T_u > n] P^{F_0}(T_u > n)$$

$$= E^{F_0}[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u \leq n] P^{F_0}(T_u \leq n) + E^{F_0}[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u > n] P^{F_0}(T_u > n)$$

对上式两边取期望, 并令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\exp\{-Ru\} = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u \leq n] P(T_u \leq n) + \lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u > n] P(T_u > n) \quad *$$

下证: $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u > n] P(T_u > n) = 0, p - a.s.$

设 $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$ 称为集合 A 的示性函数

则 $0 \leq E[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u > n] P(T_u > n) = E[\exp\{-R[u + S(n)]\} \cdot I(T_u > n)] \leq 1$, 又由强大数定理可得 $S(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, p - a.s.$, 因此由勒贝格控制收敛定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u > n] P(T_u > n) = 0, p - a.s.$

所以, 式(*)变成 $\exp\{-Ru\} = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-R[u + S(n)]\} | T_u \leq n] P(T_u \leq n)$

即 $\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-R \cdot U(T_u)) | T_u < \infty]}$, 定理得证

推论 3.6 上述建立的风险模型 $\{U(n), n=1,$

$2, \dots\}$, 其最终破产概率 $\Psi(u)$ 满足 Lundberg 不等式 $\Psi(u) < e^{-Ru}$;

推论 3.7 若险种 II 的保费收入 $\{Y_i, i=1, 2, \dots\}$ 及两险种的个体索赔额分别服从均值为 c_1, L_1, L_2 的指数分布, 则

$$\Psi(u, n) \leq \inf_{r \in \omega} e^{-ru} \sup_{0 \leq T_u \leq n} \exp\{T_u[\lambda_1(e^{-rc} - 1) - \lambda_2 \frac{rc_1}{1+rc_1} + K \frac{rL_1}{1-rL_1} + 1n(p \frac{rL_2}{1-rL_2} + q)]\}$$

其中: $\omega = \left\{0 < r < \min\left\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}\right\}\right\}$

证明 由定理 3.5 可得 $\Psi(u, n) \leq e^{-ru} \sup_{0 \leq T_u \leq n} \exp[T_u g(r)]$

因为 $g(r) = \lambda_1(e^{-rc} - 1) + \lambda_2[M_Y(-r) - 1] + K[M_{X_1}(r) - 1] + 1n[pM_{X_2}(r) + q]$

当 $r < \frac{1}{c_1}$ 时, $M_Y(-r) - 1 = \int_0^\infty e^{-rx} \frac{1}{c_1} e^{-\frac{x}{c_1}} dx$

$-1 = \frac{-rc_1}{1+rc_1}$; 当 $r > \frac{1}{c_1}$ 时, $M_Y(-r) - 1 = \infty$

同理: 当 $r < \frac{1}{L_1}$ 时, $M_{X_1}(-r) - 1 = \frac{rL_1}{1-rL_1}$; $r >$

$\frac{1}{L_1}$ 时, $M_{X_1}(-r) - 1 = \infty$; 当 $r < \frac{1}{L_2}$ 时, $M_{X_2}(-r) - 1$

$= \frac{rL_2}{1-rL_2}$; $r > \frac{1}{L_2}$ 时, $M_{X_2}(-r) - 1 = \infty$. 令 $\omega =$

$\left\{0 < r < \min\left\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}\right\}\right\}$

则 $\Psi(u, n) \leq \inf_{r \in \omega} e^{-ru} \sup_{0 \leq T_u \leq n} \exp\left\{T_u[\lambda_1(e^{-rc} - 1) - \lambda_2 \frac{rc_1}{1+rc_1} + K \frac{rL_1}{1-rL_1} + 1n(p \frac{rL_2}{1-rL_2} + q)]\right\}$

参考文献:

[1] Grandell J. Aspects of Risk Theory [M]. New York: Springer Verlag, 1991.

[2] N L Bowers. 风险理论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.

[3] 蒋志明, 王汉兴. 一类多险种风险过程的破产概率 [J]. 应用数学与计算数学学报, 2000, 14(1).

[4] 曾菡林, 林祥, 张汉君. 双险种的 Cox 风险模型 [J]. 数学理论与应用, 2003, 23(1).

The Ruin Probability of a Discrete-time Risk Model with Two-type Claims

DI Yu-hong, LIU Zai-ming

(School of Mathematical Sciences and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: In this paper, we consider a discrete-time risk model. The formulas of ultimate ruin probability and Lundberg equality for this model are obtained. An example of one class of the premium received and the amounts of claims for three different exponential distributions is given.

Key words: two-type insurance; ruin probability; adjustment coefficient