第23卷第1期
2006年2月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.23 No.1
Feb., 2006

文章编号:1005-0523(2006)01-0156-02

马尔可夫调制随机微分方程的平均稳定性

鲍建海,曹梅英,刘 霞

(中南大学 数学与计算技术学院,长沙 410075)

摘要:用KRW距离定义马尔可夫调制随机微分方程的稳定性,进而用Markov耦合研究平均稳定性

关 键 词:Markov耦合;马尔可夫调制;随机微分方程;平均稳定性

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

设$(X(t),Z(t))$是状态空间为$R^d\times N$的强马氏过程,其中$N:=\{1,2,\cdots,n\}$.第一分量满足以下的马尔可夫调制的随机微分方程 $dX(t)=b(X(t),Z(t))dt+\sigma(X(t),Z(t))dB(t)$ (1)

且(1)中的系数$b(x,k)$,$\sigma(x,k)$满足李普希兹条件和线性增长条件,则(1)存在唯一解.设(Ω,F,P)为一概率空间,F_t为F的一上升的子σ一代数族.$\{B(t)\}$是适应于F_t的取值于R^d的Brown运动.第二分量是一个与$\{B(t)\}$独立的,具有有限的状态空间N且$\{q_{ij},q_i)$是其q对,即

$$P(z(t+h)=j/Z(t)=i)=\begin{cases}q_{ij}h+o(h), & i\neq j\\ 1+q_{ii}+o(h), & i=j\end{cases}\quad 且\ q_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}.$$

定义1 假设p_k,$k=1,2$是可测空间(E_k,B_k)上的概率测度,若定义在乘积空间$(E_1\times E_2,B_1\times B_2)$上的概率测度$\tilde{p}$满足下列的边缘性:

$$\tilde{p}(A_1\times E_2)=p_1(A_1)\qquad A_1\in E_1$$

$$\tilde{p}(E_1\times A_2)=p_2(A_2)\qquad A_2\in E_2$$

则称$\tilde{p}$是p_1和p_2的耦合.用$k(p_1,p_2)$表示p_1和p_2的全体耦合概率测度组成的集合.

我们用$\{P\{t,(x,k),A);t\geq 0,(x,k)\in R^d\times N,A\in B(R^d\times N)\}$表示强马氏过程$(X(t),Z(t)$的转移函数,且定义KRW距离$W(P(t,(x,k),\cdot),P(t,(y,l),\cdot))=\inf_Q\int\lambda((x,m),(y,n))Q(dx,dm,dy,dn)$.

其中Q跑表所有边缘为$P(t,(x,k),\cdot)$和$P(t,(y,l),\cdot)$的耦合概率测度.且

$$\lambda((x,m),(y,n))=\rho(x,y)+d(m,n)$$

其中$\rho(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^d(x_i-y_i)^2}$,$d(m,n)=|m-n|$.

以下我们总假设方程(1)的解存在唯一因为方程(1)和$Z(t)$共同决定了一个强马氏过程,为了方便,我们把$(X(t),Z(t)$称作方程(1)的解.

设$\xi\in F_0$记$(X(t),Z(t))_{(\xi i)}$是以(ξ,i)为初值的解,即$X(0)=\xi$,$Z(0)=i$.若$(X(t),Z(t))_{(\xi,i)}=(\xi,i)$,$a.s$,且$E|(\xi,i)|<\infty$,则称$(\xi,i)$是方程(1)的平衡解.

定义2 设(ξ,i)是方程(1)的平衡解.称(ξ,i)是平均稳定的,如果对每个$\eta\in F_0$,且$E|(\eta,j)|<\infty$,只要$W(P_{(\eta,j)},P_{(\xi,i)})\to 0$,就能推出$\sup_{t>0}W(P_{(X(t),Z(t))(\eta,j)},P_{(\xi,i)})\to 0$.进一步,称$(\xi,i)$是指数平均稳定的,如果存在常数$c>0$,使得$W(P_{(X(t),Z(t))(\eta,j)},P_{(\xi,i)})\leq W(P_{(\eta,j)},P_{(\xi,i)}e^{-ct}$,其中$P_{(\xi,i)}$是随机变量$(\xi,i)$的分布函数

定义如下的算子:

收稿日期:2005-05-19

作者简介:鲍建海(1979-),男,山东微山人.

$$LV(x,k)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x,k)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}V(x,k)+\sum_{i=1}^{d}b_i(x,k)\frac{\partial}{\partial x_i}V(x,k)$$

$$\Omega V(x,k)=\sum_{j=0}^{n}q_{kj}V(x,k)=\sum_{j\neq k}q_{kj}V(x,j)-q_iV(x,k)$$

令 $\bar{L}=L+Q$　则 $\bar{L}$ 是强马氏过程 $(X(t),Z(t))$ 的无穷小生成元．令

$$\bar{L}V((x,k),(y,l))=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x,k)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}V((x,k),(y,l))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(y,l)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}V((x,k),(y,l))+\sum_{i,j=1}^{d}c_{ij}((x,k),(y,l))\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}V((x,k),(y,l))+\sum_{i=1}^{d}b_i(x,k)\frac{\partial}{\partial x_i}V((x,k),(y,l))+\sum_{i=1}^{d}b_i(y,l)\frac{\partial}{\partial y_i}V((x,k),(y,l))$$

其中 $c((x,k),(y,y))$ 是待定的，但使得 $\begin{pmatrix} a(x,k) & c((x,k),(y,l)) \\ c^T((x,k),(y,l)) & b(y,l)\end{pmatrix}$ 是非负定的．令 $\tilde{\Omega}V((x,k),(y,l)=\sum_{k_1,k_2}\tilde{q}(k,l,k_1,k_2)[V((x,k_1),(y,k_2))-V((x,k),(y,l))]$

其中 $\tilde{q}(k,l,k_1,k_2)$ 是 $q(k,l)$ 的耦合 q．对通过计算可以验证

$$\tilde{L}V((x,k),(y,l)=LV(x,k)$$

$$\tilde{\Omega}V((x,k),(y,l)=\Omega V(x,k)$$

$$\forall((x,k),(y,l))\in(R^d\times E)(R^d\times E)$$

即 $\tilde{L}$，$\tilde{\Omega}$ 分别是 L，Ω 的耦合．于是 $\tilde{\tilde{L}}=\tilde{L}+\tilde{\Omega}$ 是 $\bar{L}$ 的耦合．

定理　若方程(1)满足

(i) $\alpha=\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\langle b(x,k)-b(y,l),x-y\rangle}{|x-y|^2}\leq 0$

(ii) 存在 Ω 与 Ω 的耦合 $\tilde{\Omega}$ 及常数 $c>0$，使得 $\tilde{\Omega}\lambda((x,k),(y,l))\leq -cd(k,l)$，$\forall((x,k),(y,l))\in(R^d\times E)\times(R^d\times E)$，

则　(a) 当 $c_0=-c\vee\alpha\leq 0$，方程(1)的平衡解是平均稳定的．

(b) 当 $c_0=-c\vee\alpha<0$，方程(1)的平衡解是指数平均稳定的．

证明　在 L 与 L 的耦合算子中取 $c((x,k),(y,y))=\sigma(x,k)?I-2uu^*」\sigma^*(y,l)$，其中 $u=(x-y)/|x-y|$．通过计算，可得 $\tilde{L}\lambda((x,y),(y,l))\leq\alpha\rho(x,y)$，

由条件 (ii) 得 $\tilde{\Omega}\lambda((x,k),(y,l)\leq -cd(k,l)$，$c>0$

故 $\tilde{\tilde{L}}\lambda((x,k),(y,l))=(\tilde{L}+\tilde{\Omega})\lambda((x,k),(y,l))\leq C_0((x,k),(y,l))$．

假设 $P(t,(x,k),\cdot)$ 是方程(1)解的转移概率函数，记为 $P(t)$，$\tilde{P}(t,(x,k),(y,l),\cdot,\cdot)$ 是 $\tilde{\tilde{L}}$ 相对应过程的转移概率函数，则 $\tilde{P}$ 是 $(t,(x,k),(y,l),\cdot,\cdot)$ 与其自身的耦合．同[2]定理 2.3 的证明类似可证

$$\int\tilde{P}(t,(x,k),(y,l),(y_1,m),(y_2,n))\lambda((y_1,m),(y_2,n))\leq e^{c_0t}\lambda((x,k),(y,l))\tag{2}$$

假设 (ξ,i) 是方程(1)的一个平衡解，$(X(t),Z(t))_{(\eta,j)}$ 是方程(1)的一个解，则

$$\int P_{(\xi,i)}(dX,dN)P(t,(x,k),\cdot)=P_{(\xi,i)}P(t)=P_{(\xi,i)},P_{(X(t),Z(t))(\eta,j)}=P_{(\eta,j)}P(t).\tag{3}$$

由文献[3]引理 5.2 知，$\exists\tilde{P}_{(\xi,j),(\eta,j)}\in K(P_{(\xi,i)},P_{(\eta,j)})$ 使得

$$W(P_{(\xi,i)},P_{(\eta,j)})=\int\tilde{P}_{(\xi,i)(\eta,j)}(dx,dm,dy,dn)\lambda((x,m),(y,n))\tag{4}$$

由(2)－(4)得

$$W(P_{(\xi,i)},P_{(X(t),Z(t))(\eta,j)})=W(P_{(\xi,i)}P(t),P_{(\eta,j)}P(t))$$

$$\leq\int\tilde{P}_{(\xi,i),(\eta,j)}(dx,dm,dy,dn)\tilde{P}(t,(x,m),(y,n),(y_1,k_1),(y_2,k_2))\lambda((y_1,k_1),(y_2,k_2))$$

$$\leq\int P_{(\xi,i),[\eta,j]}(dx,d,,dy,dn)e^{c_0t}\lambda((x,m),(y,n))$$

$$=e^{c_0t}W(P_{(\xi,i)},P_{(\eta,j)})\tag{5}$$

由(5)式及稳定性的定义知道，当 $c_0\leq 0$，(ξ,i) 是平均稳定的，当 $c_0<0$，(ξ,i) 是指数平均稳定的．

推论　若在(1)式中把 $Z(t)$ 去掉，且存在 L 与 L 的耦合算子 $\tilde{L}$ 及常数 α 使得 $\tilde{L}\rho(x,y)\leq\alpha\rho(x,y)$，$x,y\in R^d$，则

(i) $\alpha\leq o$ 时，平衡解是平均稳定的．

(ii) $\alpha<o$ 时，平衡解是指数平均稳定的．

参考文献：

[1] 张绍义．耦合方法与随机微分方程的平均稳定性

（下转第 160 页）

$$= \Lambda\Lambda = \lambda_1^n (P_0^*(s) - \frac{c}{1-\lambda_1})$$

即 $$P_n^*(s) = \lambda_1^n (P_0^*(s) - \frac{c}{1-\lambda_1}) + \frac{c}{1-\lambda_1}$$

$$= \lambda_1^n \{ \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma(s)]^{i+n} - \frac{c}{1-\lambda_1} \} + \frac{c}{1-\lambda_1}$$

$$= \frac{\lambda_1^n}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma(s)]^{i+n} + \frac{c}{1-\lambda_1}(1-\lambda_1^n)$$

$$= \frac{\lambda_1^n}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma(s)]^{i+n} + c \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^k$$

从而定理得证.

参考文献:

[1] 徐光辉.随机服务系统[M].北京:科学出版社,1988.

[2] 史定华.随机模型的密度演化方法[M].北京:科学出版社,1999.

[3] 盛有招.排队论及其在计算机通信中的应用[M],北京:北京邮电大学出版社,2002.

[4] Laojos Takaes, The transient behavior of a single server queuing process with a poisson input, proceeding of the Fourth Berkeley symposium on Mathematical statistics and probability.[M].1960.

[5] D.G.Champernowne, An elementary method of solution of the queuing problem with a single server and constant parameters, J.Roy.Statist.Soc., ser.B, [J].Vol.(18).1956. 125—128.

The New Method to Calculate the Transient Distribution of the Length of Queuing System

ZHOU Yong-wei[1], YANG Xiao-xia[2], FAN He-hua[1]

(1.Department of Math and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management; 2.Dept. of Mathematics, Huazhong Science and Technology Univ., Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, the author use the method of Laplace transform to the differential equation system, which is $M/M/1$ queuing system satifies. So obtain the Laplace transform expression of the transient distribution $P_n(t)$ of the length of $M/M/1$ queuing system.

Key words: $M/M/1$ queuing system; transient distribution; laplace transform.

(上接第 157 页)

[2] Chen Mu fa coupling methods for multidimension diffusion process Ann prob, 1989, 17(1). 151.

[3] Chen Mu fa From Markov chain to non—equibrium particle system New York; world scientific, 1992.

[4] 徐 侃,张绍义.Markov 耦合与 Markov 过程的遍历性[J].

[5] Mao, X.R., 1999. stability of stochastic differential equationswith Markovian switching. stoch.proc.Appl.79, 45—67.

[6] Fubao xi Stability of a random diffusion with Nonlinear drift. Statistics and probability letters 68(2004)273—286.

The Stationary Stability of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching

BAO Jian-hai, CAO Mei-ying, LIU Xia

(Mathematics Shool, Central South University, Changsha 410075, China)

Abastract: We define the stability of stochastic differential equations with Markovian switching by means of KRW metrics, furthermore, investigate the stationary stability through coupling methods

Key words: markov coupling; markovian switching; stochastic differential equation; stationary stability