文章编号:1005－0523(2006)01－0158－03

$M/M/1$ 排队系统队长瞬时分布的新算法

周永卫[1],杨晓侠[2],范贺花[1]

(1.郑州航空工业管理学院 数理系,河南 郑州 450052;2.华中科技大学数学系,湖北 武汉 430073)

摘要:通过对 $M/M/1$ 排队系统所满足的微分方程组求拉普拉斯变换,从而求出了 $M/M/1$ 排队系统队长瞬时分布 $P_n(t)$ 的拉普拉斯变换表达式.

关 键 词:$M/M/1$ 排队系统;瞬时分布;拉普拉斯变换.
中图分类号:O211.6 **文献标识码**:A

1 引言

经典随机服务系统理论(也称排队论),源于关于电话服务的研究,第二次世界大战以后得到迅猛发展,成为随机运筹学和应用概率论中最有活力的研究课题.它不仅建立了较完备的理论体系,而且在军事、生产、经济、管理、交通等领域得到广泛应用.

在这当中最经典最基本的模型就是 $GI/G/1$ 排队系统,作为其特例 $M/M/1$ 排队系统,其研究成果丰富而深入,读者可参看[1],[3],[5].所谓 M/M/1 排队系统,指的是输入是参数为 λ 的最简单流,服务时间是参数为 μ 的负指数分布,单个服务台的等待制系统.顾客到达时,若服务台空闲,就立即开始服务,否则就排入队伍末尾等待,并按到达次序逐个接受服务,顾客在服务完毕后就离开系统,同时队首顾客(如果有的话)立即接受服务.关于 $M/M/1$ 排队系统队长的瞬时分布,读者可参看[1].本文在此基础上,通过对系统的状态所满足的微分方程组求拉普拉斯变换.从而求出了其队长的瞬时分布 $P_n(t)$ 的拉普拉斯变换表达式.

2 预备知识

1) 最简单流:(或者称为 Poisson 输入)

满足以下四个条件的输入称为最简单流:

a) 平稳性:在区间[a, a+t)内有 k 个顾客到来的概率与 a 无关,而只与 t,k 有关.记此

概率为 $v_k(t)$.

b) 无后效性:在不相交的区间内到达的顾客数是相互独立的.

c) 普通性:令 $\Psi(t)$ 表示长为 t 的区间内至少到达两个顾客的概率,则

$$\Psi(t)=O(t),t\to 0.$$

d) 有限性:任意有限区间内到达有限个顾客的概率为 1,因而 $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)=1$

2) 生灭过程的定义

假定有一系统,该系统具有有限个状态 0, 1, Λ, K,或可数个状态 0, 1, Λ.令 $N(t)$ 为系统在时刻

收稿日期:2005－04－28
作者简介:周永卫(1978－)男,河南周口人,助教.研究方向:排队论.

t 所处的状态. 在任意时刻 t，若系统处于状态 i，则在$(t, t+\triangle t)$内系统由状态 i 转移到状态 i+1(有限状态时 $0\leq i<K$；可数状态时 $0\leq i<\infty$)的概率为 $\lambda_i\triangle t+O(\triangle t)$，$\lambda_i>0$ 为一常数；而由 i 转移到 $i-1$(有限状态时 $0\leq i<K$；可数状态时 $0\leq i<\infty$)的概率为 $\mu_i\triangle t+O(\triangle t)$，$\mu_i>0$，为一常数；并且在$(t, t+\triangle t)$内发生距离不小于 2 的转移的概率为 $O(\triangle t)$. 这样一个系统状态随时间变化的过程 N(t)就称为一个生灭过程.

3　队长瞬时分布的计算

在此系统中，我们定义系统状态 $N(t)$，并称之为队长，$P_n(t)=p\{N(t)=n\}$，并假定 $P_n(0)=\delta_{n,i}=\begin{cases}1 & n=i\\ 0 & n\neq i\end{cases}$ 即假定初始时刻系统中有 i 个顾客. 由[1]知，系统状态为一生灭过程，且 $\begin{cases}\lambda_i=\lambda & i=0,1,\Lambda;\\ \mu_i=\mu & i=1,2,\Lambda.\end{cases}$

易得此过程的微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) & (1)\\ \dfrac{dP_n(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)\end{cases}$$

$$n\geqslant 1 \qquad (2)$$

令 $P_n(t)$的拉普拉斯变换为

$$P_n^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}P_n(t)\,dt \qquad n=0,1,2,\Lambda\Lambda$$

从而有

定理　$M/M/1$ 排队系统队长的瞬时分布的 $P_n(t)$的拉普拉斯变换表达式为

$$P_n^*(s)=\frac{\lambda_1^n}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}[\gamma(s)]^{i+n}+c\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_1^k$$

其中

$$\gamma(s)=\frac{(s+\lambda+\mu)-\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda} \qquad (3)$$

$$\lambda_1=\frac{(s+\lambda+\mu)+\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\mu} \qquad (4)$$

$$c=[(\frac{s+\lambda}{\mu}-\lambda_1)\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}[\gamma(s)]^{i+n}+b]\lambda_2^{n-1}-b \qquad (5)$$

$$\lambda_2=\frac{(s+\lambda+\mu)-\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\mu} \qquad (6)$$

$$b=\frac{\delta_{n,i}}{(1-\lambda_2)\mu} \qquad (7)$$

证明　(利用[2]中的方法)

首先对(1)取拉普拉斯变换

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{dP_0(t)}{dt}=\int_0^\infty e^{-st}(-\lambda P_0(t))\,dt+\mu\int_0^\infty e^{-st}P_1(t)\,dt$$ 即

$$(s+\lambda)P_0^*(s)=\mu P_1^*(s) \qquad (8)$$

同理对(2)取拉普拉斯变换

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{dP_n(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)\int_0^\infty e^{-st}P_n(t)\,dt+\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{n-1}(t)\,dt+\mu\int_0^\infty e^{-st}P_{n+1}(t)\,dt$$　即

$$\mu P_{n+1}^*(s)-(s+\lambda+\mu)P_n^*(s)+\lambda P_{n-1}^*(s)+\delta_{n,i}=0 \qquad n\geq 1 \qquad (9)$$

也就是

$$P_{n+1}^*(s)-\frac{(s+\lambda+\mu)}{\mu}P_n^*(s)+\frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}^*(s)+\frac{1}{\mu}\delta_{n,i}=0 \quad n\geq 1$$

对此式进行整理得

$$P_{n+1}^*(s)-\lambda_1P_n^*(s)+b=\lambda_2[P_n^*(s)-\lambda_1P_{n-1}^*(s)+b]$$

λ_1, λ_2, b 的值见(4)，(6)，(7).

对上述递推关系式进行递推

$$P_n^*(s)-\lambda_1P_{n-1}^*(s)+b=\lambda_2[P_{n-1}^*(s)-\lambda_1P_{n-2}^*(s)+b]$$

$$=\lambda_2^2[P_{n-2}^*(s)-\lambda_1P_{n-3}^*(s)+b]=\lambda_2^3[P_{n-3}^*(s)-\lambda_1P_{n-4}^*(s)+b]$$

$$=\Lambda\Lambda=\lambda_2^{n-1}[P_1^*(s)-\lambda_1P_0^*(s)+b]$$

又由(9)可知 $P_1^*(s)=\dfrac{s+\lambda}{\mu}P_0^*(s)$

故　$P_n^*(s)-\lambda_1P_{n-1}^*(s)+b=\lambda_2^{n-1}[(\dfrac{s+\lambda}{\mu}-\lambda_1)P_0^*(s)+b]$

即　$P_n^*(s)-\lambda_1P_{n-1}^*(s)=\lambda_2^{n-1}[(\dfrac{s+\lambda}{\mu}-\lambda_1)P_0^*(s)+b]-b$

而又由[4]可知，对于 M/M/1 排队系统，若令

$$\gamma(s)=\frac{(s+\lambda+\mu)-\sqrt{(s+\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

就有　$P_0^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}P_0(t)\,dt=\dfrac{[\gamma(s)]^i}{\lambda+s-\gamma(s)}=\dfrac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}[\gamma(s)]^{i+n}$

所以　$P_n^*(s)-\lambda_1P_{n-1}^*(s)=c$

整理得

$$P_n^*(s)-\frac{c}{1-\lambda_1}=\lambda_1(P_{n-1}^*(s)-\frac{c}{1-\lambda_1})=\lambda_1^2(P_{n-2}^*(s)-\frac{c}{1-\lambda_1})$$

$$= \Lambda\Lambda = \lambda_1^n \left(P_0^*(s) - \frac{c}{1-\lambda_1} \right)$$

即 $P_n^*(s) = \lambda_1^n \left(P_0^*(s) - \frac{c}{1-\lambda_1} \right) + \frac{c}{1-\lambda_1}$

$$= \lambda_1^n \left\{ \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma(s)]^{i+n} - \frac{c}{1-\lambda_1} \right\} + \frac{c}{1-\lambda_1}$$

$$= \frac{\lambda_1^n}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma(s)]^{i+n} + \frac{c}{1-\lambda_1}(1-\lambda_1^n)$$

$$= \frac{\lambda_1^n}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma(s)]^{i+n} + c \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^k$$

从而定理得证.

参考文献:

[1] 徐光辉.随机服务系统[M].北京:科学出版社,1988.

[2] 史定华.随机模型的密度演化方法[M].北京:科学出版社,1999.

[3] 盛有招.排队论及其在计算机通信中的应用[M],北京:北京邮电大学出版社,2002.

[4] Laojos Takaes, The transient behavior of a single server queuing process with a poisson input, proceeding of the Fourth Berkeley symposium on Mathematical statistics and probability. [M]. 1960.

[5] D.G.Champernowne, An elementary method of solution of the queuing problem with a single server and constant parameters, J.Roy.Statist.Soc., ser.B, [J].Vol.(18).1956. 125—128.

The New Method to Calculate the Transient Distribution of the Length of Queuing System

ZHOU Yong-wei[1], YANG Xiao-xia[2], FAN He-hua[1]

(1.Department of Math and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management; 2.Dept. of Mathematics, Huazhong Science and Technology Univ., Wuhan 430074, China)

Abstract: In this paper, the author use the method of Laplace transform to the differential equation system, which is $M/M/1$ queuing system satifies. So obtain the Laplace transform expression of the transient distribution $P_n(t)$ of the length of $M/M/1$ queuing system.

Key words: $M/M/1$ queuing system; transient distribution; laplace transform.

(上接第 157 页)

[2] Chen Mu fa coupling methods for multidimension diffusion process Ann prob, 1989, 17(1).151.

[3] Chen Mu fa From Markov chain to non—equibrium particle system New York ; world scientific , 1992.

[4] 徐 侃,张绍义.Markov 耦合与 Markov 过程的遍历性[J].

[5] Mao, X.R., 1999.stability of stochastic differential equationswith Markovian switching .stoch.proc.Appl.79, 45—67.

[6] Fubao xi Stability of a random diffusion with Nonlinear drift. Statistics and probability letters 68(2004)273—286.

The Stationary Stability of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching

BAO Jian-hai, CAO Mei-ying, LIU Xia

(Mathematics Shool, Central South University, Changsha 410075, China)

Abastract: We define the stability of stochastic differential equations with Markovian switching by means of KRW metrics, furthermore, investigate the stationary stability through coupling methods

Key words: markov coupling; markovian switching; stochastic differential equation; stationary stability