文章编号：1005－0523(2006)02－0034－04

工程结构主动控制中Riccati方程求解的改进

张　敏，胡淑兰

（华东交通大学 土木建筑学院，江西 南昌 330013）

摘要：由于建筑结构刚度和质量通常较大，对于Riccati方程的传统求解方法，常会发生计算溢出失效．为了避免该问题，本文对Riccati方程的求解进行了改进，并做了误差控制，表明本文的求解，是一种比较实用的改进方法．

关　键　词：主动控制；线性最优控制算法；Riccati方程；Riccati方程的求解

中图分类号：U11　　　　**文献标识码**：A

1　前言

工程结构主动控制是利用外部能源，在建筑结构受到激励振动过程中，瞬时施加控制力，以迅速衰减和控制结构的振动反应．结构主动控制一般可分为：结构全主动控制、结构半主动控制、结构混合控制．

结构主动控制的实施是以控制算法为基础的．其控制目标是使主动控制系统在满足状态方程和各种约束条件下，选择合适的增益矩阵，寻找最优的控制参数，使系统达到较优的性能指标，实现对结构的最优控制．

目前，控制算法还处在发展和创立阶段．但较为普遍采用的是线性最优控制算法和瞬时最优控制算法．

线性最优控制算法是采用二次型目标函数，求主动控制结构体系中的最优控制力．其原理如下：

对于 n 个自由度的主动控制结构体系，设置有 r 个控制器(控制力为$\{u(t)\}$)，在外激励$\{P(t)\}$作用下，其振动方程为：

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{P(t)\}+[B_1]\{u(t)\}$$

该体系对应的状态方程为：

$$\{\dot{z}\}=[A]\{z\}+[B]\{u\}+\{D\}$$

式中 $[A]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C]\end{bmatrix}$，$\{z\}=\begin{Bmatrix}\{y\}\\ \{\dot{y}\}\end{Bmatrix}$

$[B]=\begin{bmatrix}[0]\\ [M]^{-1}[B_1]\end{bmatrix}$，$\{D\}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ [M]^{-1}\{P(t)\}\end{Bmatrix}$

定义性能函数 J 为：

$$J=\frac{1}{2}\{z(t_f)\}^T[S]\{z(t_f)\}+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\{z(t)\}^T[Q]\{z(t)\}+\{u(t)\}^T[R]\{u(t)\})dt$$

式中，[S]、[Q]、[R]为权函数矩阵，[S]、[Q]为非负定矩阵，[R]为正定矩阵，t_f 为控制的终止时刻．

经分析，使目标函数 J 达到最小的最优主动控制力为：

$$\{u(t)\}=-[R]^{-1}[B]^T[P(t)]\{z(t)\}$$

式中[P(t)]满足Riccati方程：

$$-[\dot{P}(t)]=[P(t)][A]+[A]^T[P(t)]+[Q]-[P(t)][B][R]^{-1}[B]^T[P(t)]$$

其边界条件为：$[P(t_f)]=[S]$

收稿日期：2006－01－09

作者简介：张　敏(1965－)，男，江西弋阳人，华东交通大学副教授，博士，研究方向：高层结构设计理论研究．

2 Riccati 方程的传统解法

Riccati 方程具有下列性质：

(1)对于完全能控的线性定常系统，Riccati 方程的稳态解满足下列代数 Riccati 方程：

$[P(t)][A]+[A]^T[P(t)]+[Q]-[P(t)][B][R]^{-1}[B]^T[P(t)]=[0]$；

(2)若线性定常系统不完全能控，则代数 Riccati 方程无解.

(3)对于线性定常系统，其状态方程

$$\{\dot{z}\}=[A]\{z\}+[B]\{u\}$$

式中，$[A]$为 $n\times n$ 矩阵，$[B]$为 $n\times r$ 矩阵，则系统状态能控的充分必要条件为：$n\times nm$ 能控性矩阵 $[B\quad AB\quad \cdots\quad A^{n-1}B]$的秩为 n.

大量的计算经验表明，对于完全能控的线性定常系统，矩阵$[P(t)]$在$[0,t_f]$的很大一段时间间隔内都近似常数矩阵，只在接近 t_f 的很短时间间隔内变化较大，因此在实际工程中常采用代数 Riccati 方程来确定其控制律. 但是，对于不完全能控的线性定常系统，由于其代数 Riccati 方程无解，因此只能由其微分形式的 Riccati 方程确定其控制律. 不讨论系统的能控性，而盲目采用代数 Riccati 方程确定其控制律，是不恰当的.

微分形式 Riccati 方程的传统解法如下[4]：

对于 Riccati 方程：

$$-[\dot{P}(t)]=[P(t)][A]+[A]^T[P(t)]+[Q]-[P(t)][B][R]^{-1}[B]^T[P(t)] \qquad (1)$$

其解为：

$$[P(t)]=[Y(t)]\cdot[X(t)]^{-1} \qquad (2)$$

式中$[Y(t)]$和$[X(t)]$为下列式(3)线性矩阵微分方程组的解

$$\begin{cases}[X'(t)]=[A][X(t)]-[B][R]^{-1}[B]^T[Y(t)]\\ [Y'(t)]=-[Q][X(t)]-[A]^T[Y(t)]\\ [X(t_f)]=[I],[Y(t_f)]=[S]\end{cases} \qquad (3)$$

将$[X(t)]$、$[Y(t)]$写成矩阵形式：

$$\begin{cases}\begin{Bmatrix}[X'(t)]\\ [Y'(t)]\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[A] & -[B][R]^{-1}[B]^T\\ -[Q] & -[A]^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[X(t)]\\ [Y(t)]\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}[X(t_f)]\\ [Y(t_f)]\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}[I]\\ [S]\end{Bmatrix}\end{cases} \qquad (4)$$

方程(4)求解如下：

令$[G]=\begin{bmatrix}[A] & -[B][R]^{-1}[B]^T\\ -[Q] & -[A]^T\end{bmatrix}$

则状态转移矩阵$[\Phi(t-t_f)]$按下式计算：

$$[\Phi(t-t_f)]=e^{[G](t-t_f)}=[I]+[G](t-t_f)+\frac{1}{2!}[G]^2(t-t_f)^2+\cdots+\frac{1}{m!}[G]^m(t-t_f)^m+\cdots$$

可写为$[\Phi(t-t_f)]=\begin{bmatrix}[\varphi_{xx}] & [\varphi_{xy}]\\ [\varphi_{yx}] & [\varphi_{yy}]\end{bmatrix}$

因此$\begin{Bmatrix}[X(t)]\\ [Y(t)]\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\varphi_{xx}] & [\varphi_{xy}]\\ [\varphi_{yx}] & [\varphi_{yy}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[I]\\ [S]\end{Bmatrix}$，展开，得

$$\begin{cases}[X(t)]=[\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S]\\ [Y(t)]=[\varphi_{yx}]+[\varphi_{yy}][S]\end{cases}$$

因此，Riccati 方程的解为：

$$[P(t)]=([\varphi_{yx}]+[\varphi_{yy}][S])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S])^{-1} \qquad (5)$$

3 Riccati 方程求解的改进

在结构主动控制中，由于结构的质量和刚度通常数值较大，按照上述原理编程求解 Riccati 方程，常常无法实现，原因是计算机能够显示的浮点数是有一定范围的(通常在 2.22507e−308 和 1.7977e+308 之间)，计算若超出此范围，则计算溢出失效. 当采用上述原理编程计算$[\Phi(t-t_f)]$、$[X(t)]$、$[Y(t)]$时，经常会发生计算超出浮点数范围失效. 为了解决这个问题，对 Riccati 方程的求解作如下改进.

取正整数 n，令$[\Phi(t-t_f)]=[\Phi_1(t-t_f)]^n$

按下列式(6)计算$[\Phi_1(t-t_f)]$，使计算不超出计算机浮点数范围.

$$[\Phi_1(t-t_f)]=e^{[G](t-t_f)/n}=[I]+\left(\frac{[G](t-t_f)}{n}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{[G](t-t_f)}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m!}\left(\frac{[G](t-t_f)}{n}\right)^m+\cdots \qquad (6)$$

可写为$[\Phi_1(t-t_f)]=\begin{bmatrix}[\varphi_{xx}] & [\varphi_{xy}]\\ [\varphi_{yx}] & [\varphi_{yy}]\end{bmatrix}$

因此$\begin{Bmatrix}[X(t)]\\ [Y(t)]\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\varphi_{xx}] & [\varphi_{xy}]\\ [\varphi_{yx}] & [\varphi_{yy}]\end{bmatrix}^n\begin{Bmatrix}[I]\\ [S]\end{Bmatrix}$，展开，得

$[X(t)]=([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_{n-1}])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_{n-2}])\cdots([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_1])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S])$

$[Y(t)]=[S_n]([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_{n-1}])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_{n-2}])\cdots([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_1])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S])$

$[Y(t)]=[S_n][X(t)]$ (7)

式中 $[S_1]=([\varphi_{yx}]+[\varphi_{yy}][S])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S])^{-1}$

…

$[S_i]=([\varphi_{yx}]+[\varphi_{yy}][S_{i-1}])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_{i-1}])^{-1}$

…

$[S_n]=([\varphi_{yx}]+[\varphi_{yy}][S_{n-1}])([\varphi_{xx}]+[\varphi_{xy}][S_{n-1}])^{-1}$

式(7)代入式(2),得 Riccati 方程的解为:

$[P(t)]=[S_n]$

4 误差控制

采用上述改进方法求解 *Riccati* 方程,由于在计算状态转移矩阵 $[\Phi(t-t_f)]$ 时,采用了 $[\Phi(t-t_f)]=[\Phi_1(t-t_f)]^n$,将引起误差累积,因此应对该误差进行合理控制.

假设矩阵 $[\Phi_1(t-t_f)]$ 内各元素的最大相对误差为 η,则 $[\Phi_1(t-t_f)]$ 内各元素的绝对值不会超过矩阵 $[\bar{\Phi}_1(t-t_f)](1+\eta)$ 相对应元素的绝对值,其中 $[\bar{\Phi}_1(t-t_f)]$ 为 $[\Phi_1(t-t_f)]$ 的精确矩阵.

由于 $[\Phi(t-t_f)]=[\Phi_1(t-t_f)]^n$,则 $[\Phi(t-t_f)]$ 内各元素的绝对值不超过矩阵 $[\bar{\Phi}_1(t-t_f)]^n(1+\eta)^n$ 相对应元素的绝对值.

由于 $[\bar{\Phi}_1(t-t_f)]^n(1+\eta)^n\approx[\bar{\Phi}_1(t-t_f)]^n(1+n\eta)$

因此 $[\Phi(t-t_f)]=[\Phi_1(t-t_f)]^n$ 各元素的最大相对误差为 $n\eta$.

由此可知,若控制 $[\Phi(t-t_f)]=[\Phi_1(t-t_f)]^n$ 内各元素的允许相对误差为 $[\delta]$,则应控制矩阵 $[\Phi_1(t-t_f)]$ 内各元素的允许相对误差为 $[\eta]\leq\frac{[\delta]}{n}$.

5 结束语

工程结构主动控制线性最优控制算法中,Riccati 方程的求解是关键的一步.由于建筑结构刚度和质量通常较大,在采用 Riccati 方程的传统方法求解时,常会发生计算机溢出失效而使 Riccati 方程无法求解.笔者在东南大学完成博士论文《巨型框架多功能减振结构风振控制研究》时就发生了该问题,因此本文对 Riccati 方程传统求解方法进行改进,并作了误差分析,按该方法求解 Riccati 方程可以避免发生计算溢出失效问题.因此本文对 Riccati 方程的求解,是一种比较实用的改进方法.

参考文献:

[1] 张 敏.巨型框架多功能减振结构风振控制研究[D].东南大学博士论文,2003,6.

[2] 顾仲权,马扣根,陈卫东.振动主动控制[M].北京:国防工业出版社,1997.

[3] 周福霖.工程结构减振控制[M].北京:地震工业出版社,1997(第一版).

[4] 郭尚荣.随机控制[M].北京:清华大学出版社,1999.

[5] 谢克明.现代控制理论基础[M].北京:北京工业大学出版社,2001.

[6] 郑大钟.线性系统理论[M].北京:清华大学出版社,2000.

Improvement of Solution of Riccati Equation in Engineering Structure Active Control

ZHANG Min, HU Shu-lan

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Owing to the rigidity and mass of building structure larger, traditional solution of the Riccati equation may frequently produce calculating overflow and fail in computer. Consequently, this paper improves the traditional solution of the Riccati equation, and controls the calculating error. The result seems to indicate that the method of this paper may be more practical.

Key word: active control, linear optimal active control algorithm, Riccati equation, solution of Riccati equation