

文章编号: 1005—0523(2006)02—0132—03

# 关于 $C_m \vee S_n$ 的均匀全染色

马 刚<sup>1</sup>, 马少仙<sup>1</sup>, 张忠辅<sup>1,2</sup>

(1. 西北民族大学 计算机科学与信息工程学院, 甘肃 兰州 730030; 2. 兰州交通大学 应用数学研究所, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 对一个正常的全染色满足各种颜色所染元素数(点或边)相差不超过 1 时, 称为均匀全染色, 其所用最少染色数称为均匀全色数. 就图  $C_m$  与星  $S_n$  的联图  $C_m \vee S_n$ , 得到了在  $m, n$  不同取值情况下的均匀全色数.

**关 键 词:** 图; 星; 联图; 均匀全色数

**中图分类号:** O157.5

**文献标识码:** A

## 1 引言

图的染色问题, 是图论研究的重要内容之一, 图的染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数. 已经公认, 确定图的有关色数是一个十分困难的问题. 图的全染色<sup>[1-3]</sup>猜想已有 40 年, 近年来张忠辅、王维凡等人先后又提出图的均匀全染色<sup>[6-8]</sup>的概念和相关猜想, 但是所知结果甚少. 本文给出了圈  $C_m$  与星  $S_n$  的联图的均匀全色数.

## 2 相关定义及引理

**定义 1**<sup>[6-8]</sup> 对图  $G(V, E)$  的映射  $f: \{V, E\} \xrightarrow{f} \{1, 2, \dots, k\}$ , 若满足下列条件:

- 1)  $\forall u, v \in V, uv \in E$ , 且  $u \neq v$ , 有  $f(u) \neq f(v)$ ;
- 2)  $\forall uv, uw \in E, v \neq w$ , 有  $f(uv) \neq f(uw)$ ;
- 3)  $\forall u, v \in V, uv \in E$ , 且  $u \neq v$ , 有  $f(u) \neq f(uv)$ ,  $f(v) \neq f(uv)$ ;
- 4)  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 有  $||T_i| - |T_j|| \leq 1$ .

则称  $f$  为  $G$  的一个  $k$ -均匀全染色法, 简记作  $k$

-ETC of  $G$ . 而

$$\chi_{et}(G) = \min \{k \mid k\text{-ETC of } G\}$$

称为  $G$  的均匀全色数. 其中  $T_i = V_i \cup E_i, \forall x \in T_i, f(x) = i$ .

显然有  $\chi_{et}(G) \geq \Delta(G) + 1$ , 其中  $\Delta(G)$  表示  $G$  的最大度数.

**猜想**<sup>[6]</sup> 对简单图  $G$ , 有  $\chi_{et}(G) \leq \Delta(G) + 2$ , 且  $\chi_{et}(G) = \chi_c(G)$ .

其中  $\chi_c(G)$  为  $G$  的全色数.

**定义 2**<sup>[2]</sup> 设图  $G$  与  $H$  有:  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ . 若  $G \vee H$  满足:

- 1)  $V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$ ;
- 2)  $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$ .

则称  $G \vee H$  为  $G$  与  $H$  的联图.

**引理 1**<sup>[6]</sup> 对  $n$  阶完全图  $K_n$ , 有

$$\chi_{et}(K_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n+1, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

**引理 2**<sup>[6]</sup> 若  $H$  是  $G$  的子图, 则有

$$\chi_c(H) \leq \chi_c(G).$$

**引理 3**<sup>[2][4]</sup> 对简单图  $G$ , 若  $G[V_\Delta]$  无圈, 则有  $\chi'_c(G) = \Delta(G)$ .

其中  $V_\Delta = \{v \mid d(v) = \Delta, v \in V(G)\}$ ,

收稿日期: 2005—11—22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 19871036); 国家民委科研项目(05XB07)

作者简介: 马 刚(1975—), 男, 甘肃定西人, 讲师, 主要从事应用数学、图论的研究.

中国知网 <https://www.cnki.net>

$E(G[V_\Delta]) = \{uv \mid d(u) = d(v) = \Delta(v) = \Delta, uv \in E(G)\}$ ,  $\chi'_e(G)$  为  $G$  的均匀边色数.

文中未加述及的术语、记号可参见[1-3].

### 3 主要结论及其证明

在以下的讨论中,记  $m$  阶圈  $C_m = u_1 u_2 \cdots u_m u_1$ , ( $m \geq 3$ ). 记  $n+1$  阶星  $S_n: V(S_n) = \{v_i \mid i=0, 1, 2, \dots, n\}$ ;  $E(S_n) = \{v_0 v_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ . 由定义2有下述引理4.

**引理4** 当  $m \geq 3$  时,对  $C_m \vee S_2$  有  $\Delta(C_m \vee S_n) = m+n$ .

**定理1** 当  $m=3$  时,对  $C_m \vee S_n$  有

$$\chi_{et}(C_3 \vee S_n) = \begin{cases} 5, & n=1; \\ 7, & n=2; \\ n+4, & n \geq 3. \end{cases}$$

**证明** 以下分三种情形对本定理予以证明.

**Case1:** 当  $n=1$  时.  $C_3 \vee S_1 = K_5$ , 由引理1知  $\chi_{et}(C_3 \vee S_1) = 5$ , 所以此时结论成立.

**Case2:** 当  $n=2$  时. 由定义1和引理4知  $\chi_{et}(C_3 \vee S_2) \geq 6$ ; 又  $C_3 \vee S_2 = K_6 - v_1 v_2$ , 则由引理1和引理2易见  $\chi_{et}(C_3 \vee S_2) \leq \chi_{et}(K_6) = 7$ . 若  $\chi_{et}(K_6 - v_1 v_2) = 6$ , 则除对  $v_1, v_2$  染相同色的这一色至多包含4个元素(点或边)外,其余每一种色至多包含3个元素,从而六种色至多染19个元素,但  $|V(K_6 - v_1 v_2) \cup E(K_6 - v_1 v_2)| = 20$ , 而这是不可能的. 易得  $C_3 \vee S_2$  的7-ETC法,所以此时结论成立.

**Case3:** 当  $n \geq 3$  时. 由定义1和引理4知  $\chi_{et}(C_3 \vee S_n) \geq n+4$ , 为了证明结论成立, 仅需证明  $C_3 \vee S_n$  存在一个  $(n+4)$ -ETC法. 设匹配集  $M = \{v_0 u_1, u_2 u_3; u_1 u_2, v_0 u_3\}$ , 定义图  $G^*$  为:

$$1) V(G^*) = V(C_3 \vee S_n) \cup \{w\};$$

$$2) E(G^*) = E(C_3 \vee S_n - M) \cup \{wv_0, wu_1, wu_2, wu_3\} \cup \{uw_i \mid i=5, 6, \dots, n, n \geq 5\}.$$

则  $V_\Delta(G^*) = \{v_0, u_1, u_2, u_3\}$ , 且  $G^*$  最大度点导出图  $G[V_\Delta]$  的边集  $E(V_\Delta) = \{v_0 u_2, u_1 u_3\}$ . 从而由引理3知:

$$\chi'_e(G^*) = \Delta(G^*) = n+2.$$

令  $f_1$  为  $G^*$  的一个  $(n+2)$ -PEEC法(即  $(n+2)$ -均匀边染色), 在  $f_1$  的基础上作映射  $f_2$  为:

$$f_2(v_0) = f_1(wv_0); f_2(u_i) = f_1(wu_i), i=1, 2, 3;$$

$$f_2(v_i) = f_1(wv_i), i=5, 6, \dots, n, (n \geq 5).$$

令  $f_3$  为:

$$f_3(v_0 u_1) = f_3(u_2 u_3) = n+3; f_3(u_1 u_2) = f_3(v_0 u_3) = n+4;$$

$$f_3(v_1) = f_3(v_2) = n+3; f_3(v_3) = f_3(v_4) = n+4, (n \geq 4 \text{ 时才有 } v_4 \text{ 点}).$$

此时对  $C_3 \vee S_n$  有:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n+4\},$$

$$|T_i| = \begin{cases} 3 \text{ 或 } 4, & n=3, 4, 5; \\ 4, & n=6; \\ 4 \text{ 或 } 5, & n \geq 7. \end{cases}$$

从而将  $f_1, f_2, f_3$ , 合在一起, 恰好构成  $C_3 \vee S_n$  的一个  $(n+4)$ -ETC法, 所以此时结论成立.

综上所述, 定理为真.

**定理2** 当  $m \geq 4$  时, 对  $C_m \vee S_n$  有  $\chi_{et}(C_m \vee S_n) = m+n+1$ .

**证明** 以下分两种情形对本定理予以证明.

**Case1:** 当  $n=1$  时. 由定义1和引理4知  $\chi_{et}(C_m \vee S_1) \geq m+2$ , 为了证明结论成立, 仅需证明  $C_m \vee S_1$  存在一个  $(m+2)$ -ETC法. 设匹配集

$$M = \{v_0 u_2, v_1 u_4\}, \text{ 定义图 } G^* \text{ 为:}$$

$$1) V(G^*) = V(C_m \vee S_1) \cup \{w\};$$

$$2) E(G^*) = E(C_m \vee S_1 - M) \cup \{wv_0, wv_1, wu_2\} \cup \{wu_i \mid i=4, 5, \dots, m\}.$$

则  $V_\Delta(G^*) = \{v_0, v_1\}$ , 且  $G^*$  最大度点的导出图  $G[V_\Delta] = v_0 v_1$ . 从而由引理3知:

$$\chi'_e(G^*) = \Delta(G^*) = m+1.$$

令  $f_1$  为  $G^*$  的一个  $(m+1)$ -PEEC法, 在  $f_1$  的基础上对  $C_m \vee S_1$  作映射  $f_2$  为:

$$f_2(v_i) = f_1(wv_i), i=0, 1; f_2(u_2) = f_1(wu_2);$$

$$f_2(u_i) = f_1(wu_i), i=4, 5, \dots, m.$$

令  $f_3$  为:

$$f_3(v_0 u_2) = f_3(v_1 u_4) = m+2; f_3(u_1) = f_3(u_3) = m+2.$$

此时对  $C_m \vee S_1$  有:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m+2\}, |T_i| = 3 \text{ 或 } 4.$$

从而将  $f_1, f_2, f_3$ , 合在一起, 恰好构成  $C_m \vee S_1$  的一个  $(m+2)$ -ETC法, 所以此时结论成立.

**Case2:** 当  $n \geq 2$  时. 由定义1和引理4知  $\chi_{et}(C_m \vee S_n) \geq m+n+1$ , 为了证明结论成立, 仅需证明  $C_m \vee S_n$  存在一个  $(m+n+1)$ -ETC法.

又因  $C_m \vee S_n$  只有一个最大度点  $v_0$ . 记  $G^* = (C_m \vee S_n) \vee \{w\}$ . 则  $V_\Delta(G^*) = \{v_0, w\}$ , 且  $G^*$  最大度点的导出图  $G[V_\Delta] = wv_0$  是2阶路. 从而由引理3知:

$$\chi'_e(G^*) = \Delta(G^*) = m + n + 1.$$

令  $f^*$  为  $G^*$  的一个  $(m+n+1)$ -PEEC 法, 在  $f^*$  的基础上对  $C_m \vee S_n$  作映射  $f$  为:

$$f(u) = f^*(wu), u \in V(C_m \vee V_n); f(w) = f^*(w), w \in E(C_m \vee S_n).$$

从而  $f$  为  $C_m \vee S_n$  的一个  $(m+n+1)$ -ETC 法, 所以此时结论成立.

综上所述, 定理为真.

由定理 1、定理 2 和引理 4 可得下述定理 3.

**定理 3** 当  $m \geq 3$  时, 对  $C_m \vee S_n$ , 有

$$\chi_{et}(C_m \vee S_n) = \begin{cases} \Delta + 1, & n=2, m=3; \\ \Delta + 2, & \text{其余.} \end{cases}$$

由此可见, 圈与星的联图  $C_m \vee S_n$  对均匀全染色猜想成立.

## 参考文献:

- [1] H. P. Yap, Total colorings of graphs[M]. Notes in mathematics, 1623 springer Berlin, 1996.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with application[M]. The Macmillan press Ltd, 1976.
- [3] 田 牛, 马仲番. 图与网络流理论[M]. 科学出版社, 北京, 1987.
- [4] 张忠辅, 张建勋. 第 I 类图的若干充分条件[J]. 数学杂志, 5(2)1985, 161—165.
- [5] 张忠辅, 王建方. 关于图的全着色——一个综述[J]. 数学进展, 4(1992), 390—397.
- [6] 张忠辅. 关于图的均匀全染色[R]. 天津: 南开大学数学研究所, 组合数学与图论, 1996.
- [7] Wang Weifan, Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3, Graphs and Combin. [J]. 18(2002), 677—685.
- [8] 马 刚, 张忠辅, 强会英. 关于  $C_m \vee F_n$  的均匀全染色[J]. 兰州交通大学学报, 2005, 24(4), 147—149.

## On Equitable Total-Coloring of $C_m \vee S_n$

MA Gang<sup>1</sup>, MA Shao-xian<sup>1</sup>, ZHANG Zong-fu<sup>1,2</sup>

(1. The College of computer science and information engineering, Northwest University for nationalities, Lanzhou, 730030; 2. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiao Tong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** A total-coloring is called equitable if  $||T_i| - |T_j|| \leq 1$ , the  $|T_i|$  is called chromatic number of the color. The minimum number of colors required for an equitable proper total-coloring, a simple graph  $G$  is denoted by  $\chi_{et}(G)$ . In this paper, we have given the equitable total chromatic number of  $C_m \vee S_n$ .

**Key words:** cycle; star; join-graph; equitable total chromatic number