文章编号:1005-0523(2006)02-0135-03

型—A半群基本矩形带上的自然偏序

李春华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:主要研究了—A半群基本矩形带上的自然偏序,证明了型—A半群基本矩形带上的自然偏序关于乘法是相容的,给出了型—A半群基本矩形带上的一些性质.最后,刻划了型—A半群基本矩形带上的理想.

关 键 词:型—A半群;基本矩形带;自然偏序

中图分类号:O152.7　　**文献标识码**:A

1 预备知识

本文出现的记号和术语,若未加说明,均参见文献[1-4],[6-8].

Fountain在文[1]中定义了半群S的Green*—关系L^*,S的元素a,b符合关系L^*当且仅当($\forall x, y \in S^1$)($ax = ay \Leftrightarrow bx = by$).对偶地定义$R^*$.而$D^*$是$S$的等价关系格中的$L^* \vee R^*$.$J^*$定义为$(a,b) \in J^*$当且仅当$J^*(a) = J^*(b)$.一般地,$L \subseteq L^*$且$R \subseteq R^*$.但当$a$,$b$是正则元时,$aL^* b$($aR^* b$)当且仅当$aLb$($aRb$).为方便记,我们用$L_a^*$表示含$a$的$L^*$—类,用$R_a^*$表示含$a$的$R^*$—类.$E(T)$表示$T$中的幂等元集.记$a^+$为$E(R_a^*)$中元,$a^*$为$E(L_a^*)$中元.

半群S称为富足的,如果它的所有的L^*—类及R^*—类都含幂等元;富足半群S称为拟适当的,如果S的幂等元集是S的子半群.拟适当半群S称为适当的,如果它的幂等元集形成半格.富足半群S称为IC的,如果$\forall a \in S$,$a^* \in L_a^* \cap E(S)$,$a^+ \in R_a^* \cap E(S)$,存在双射$\theta: \langle a^+ \rangle \to \langle a^* \rangle$,其中$\langle a^+ \rangle$是满足$x = xa^+ = a^+ x$的幂等元$x$生成的$S$的子半群.一个型—$A$半群可等价的定义为$IC$的适当半群.富足半群$S$称为型—$A$半群的基本矩形带,如果$S$是它的型—$A$子半群$S_{i\lambda}$的无交并,且满足($\forall (i,\lambda), (j,\mu) \in I \times \Lambda$)$S_{i\lambda} S_{ju} = S_{i\mu}$([5]).郭小江在文[5]中证明了型—$A$半群的基本矩形带都同构于一个型—$A$半群的Rees矩形半群$M(I,T,\Lambda;P)$,其中$M(I,T,\Lambda;P) = I \times T \times \Lambda \times$,$I$,$\Lambda$都是非空集合,$T$是型—$A$半群,$P$是由$T$的平移壳的单位群$\Sigma(T)$中的元素$p_{i\lambda}$构成的$\Lambda \times I$矩阵$(p_{\lambda i})$,半群乘法定义为$(i,a,\lambda)(j,b,\mu) = (i, ap_{\lambda j}b, \mu)$.

在本文中如无特别说明,$S = M(I,T,\Lambda;P)$均为型—A半群的Rees矩形半群.

引理1.1[5]　令$S = M(I,T,\Lambda;P)$,(i,a,λ),$(j,b,\mu) \in S$,则以下各款成立:

(1) $(i,a,\lambda) L^* (j,b,\mu) \Leftrightarrow \mu$, $aL^*(T)b$;

(2) $(i,a,\lambda) R^* (j,b,\mu) \Leftrightarrow i = j$, $aR^*(T)b$;

(3) $(i,a,\lambda) L^* (i, p_{\lambda i}^{-1} a^*, \lambda) \in E(S)$,$(i,a,\lambda) R^* (i, a^+ p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) \in E(S)$.

Lawson在文[7]中把正则半群中的自然偏序推广到了富足半群,证明了富足半群S上如下定义的关系"$\leq$"是偏序:$a \leq b \Leftrightarrow \exists e, f \in E(S)$,$a = eb = bf$.

定义1.2[4]　令S为富足半群,若$\forall e, f \in E$

收稿日期:2005-11-18

基金项目:华东交通大学科研基金资助项目.

作者简介:李春华(1973-),男,江西宜丰人,讲师,主要从事半群代数理论的研究.

(S)，$f\leq e\cdot\Rightarrow e=f$，则称 S 幂等元为本原的.、**定义 1.3**[3] 令 S 为富足半群，若 $\forall$ a，b，c$\in S$，$a\leq b\Rightarrow ac\leq bc$，$ca\leq cb$，则称 S 上的自然偏序关于乘法是相容的.

引理 1.4[7] 令 S 为富足半群，x，a，$b\in S$，则 $L^*_{xa}\leq L^*_a$，$R^*_{ax}\leq R^*_a$.

2 主要结果

命题 2.1 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，则 $L^*_{(i,a,\lambda)}\leq L^*_{(j,b,\mu)}\Leftrightarrow L^*_a(T)\leq L^*_b(T)$，$R^*_{(i,a,\lambda)}\leq R^*_{(j,b,\mu)}\Leftrightarrow R^*_a(T)\leq R^*_b(T)$，其中$(i,a,\lambda)$，$(j,b,\mu)\in S$.

证明 仅就 L^* 的情形证明，R^* 情形可对偶推得.令(i,a,λ)，$(j,b,\mu)\in S$，若 $L^*_{(i,a,\lambda)}\leq L^*_{(j,b,\mu)}$，由引理 1.1，$L^*_{(j,p^{-1}_{\lambda i}a^*,\lambda)}\leq L^*_{(j,p^{-1}_{\mu j}b^*,\mu)}$.又$(i,p^{-1}_{\lambda i}a^*,\lambda)$，$(j,p^{-1}_{\mu j}b^*,\mu)$均为正则元，于是 $L_{(i,p^{-1}_{\lambda i}a^*,\lambda)}\leq L_{(j,p^{-1}_{\mu j}b^*,\mu)}$.故$\exists$(k，x，v)$\in S$，使得$(i,p^{-1}_{\lambda i}a^*,\lambda)=(k,x,v)(j,p^{-1}_{\mu j}b^*,\mu)$.于是 $i=k$，$\lambda=\mu$，$p^{-1}_{\lambda i}a^*=xp_{vj}p^{-1}_{\mu j}b^*$.上式两边同乘 $a^*p_{\lambda i}$，得 $a^*=a^*p_{\lambda i}xp_{vj}p^{-1}_{\mu j}b^*$.由引理 1.4，有 $L^*_{a^*}=L^*_{a^*p_{\lambda i}xp_{vj}p^{-1}_{\mu j}b^*}\leq L^*_b$.以上证明过程可逆.因此，$L^*_{(i,\alpha,\lambda)}\leq L^*_{(j,b,\mu)}\Leftrightarrow L^*_a(T)\leq L^*_b(T)$.

命题 2.2 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，易知 $E(S)=\{(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)\mid i\in I,\lambda\in\Lambda,e\in E(T)\}=\{(i,ep^{-1}_{\lambda i},\lambda)\mid i\in I,\lambda\in\Lambda,e\in E(T)\}$，则$(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)\leq(j,p^{-1}_{\mu j}f,\mu)\Leftrightarrow i=j$，$\lambda=\mu$，$e\leq f$.于是$(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)$是 S 的本原幂等元当且仅当 e 是 T 的本原幂等元.

证明 令$(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)$，$(j,p^{-1}_{\mu j}f,\mu)\in E(S)$，则$(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)\leq(j,p^{-1}_{\mu j}f,\mu)$当且仅当$(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)=(j,p^{-1}_{\mu j}fp_{\mu i}p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)=(i,p^{-1}_{\lambda i}ep_{\lambda j}p^{-1}_{\mu j}f,\mu)$.比较分量，得 $i=j$，$\lambda=\mu$，$p^{-1}_{\lambda i}e=p^{-1}_{\lambda i}ef$.上式两端左乘 $ep_{\lambda i}$，得 $e=ef$.又 T 为型$-A$ 半群，故 $e=ef=fe$.即 $e\leq f$.因此，$(i,p^{-1}_{\lambda i}e,\lambda)$是 S 的本原幂等元当且仅当 e 是 T 的本原幂等元至此完成命题的证明.

基于以上事实，下列结论是显然的.

定理 2.3 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，则 S 是本原 J^*-单的当且仅当 T 是本原 J^*-单的.

命题 2.4 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，则$\forall$(i，a，λ)，(j，b，μ)$\in s$，$(i,a,\lambda)\leq(j,b,\mu)$当且仅当 $i=j$，$\lambda=\mu$，$a\leq b$.

证明 令(i,a,λ)，$(j,b,\mu)\in S$，$(i,a,\lambda)\leq(j,b,\mu)$，则由富足半群上的自然偏序定义.得$(i,a,\lambda)=(i,a^+p^{-1}_{\lambda i},\lambda)(j,b,\mu)=(j,b,\mu)(i,p^{-1}_{\lambda i}a^*,\lambda)$.通过分量比较易知.

$i=j$，$\lambda=\mu$，$a=a^+b=ba^*$.即 $a\leq b$.以上证明过程可逆，因此命题结论成立.

定理 2.5 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，则 S 上的自然偏序关于乘法是相容的.

证明 令(i,a,λ)，(j,b,μ)，$(k,c,v)\in S$，$(i,a,\lambda)\leq(j,b,\mu)$，则由命题 2.4，$i=j$，$\lambda=\mu$，$a\leq b$.又因 T 为型$-A$ 半群，故 $ap_{\lambda k}c\leq bp_{\lambda k}c$.于是由命题 2.4，我们有$(i,ap_{\lambda k}c,v)\leq(i,bp_{\lambda k}c,v)$.即$(i,a,\lambda)(k,c,v)\leq(i,b,\lambda)(k,c,v)$.注意到 $i=j$，$\lambda=\mu$.因此，$(i,a,\lambda)(k,c,v)\leq(j,b,\mu)(k,c,v)$.即 S 上的自然偏序关于乘法右相容.对偶地，可证 S 上的自然偏序关于乘法左相容.至此完成定理证明.

定理 2.6 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，则 S 为局部型$-A$ 半群.反之，局部型$-A$ 半群可通过这种方式构作.

证明 可由定理 2.5，Lawson[7]推论 3.2 直接推得.

定理 2.7 令 $S=M(I,T,\Lambda;P)$，V 是 T 的一个理想，又记 $\bar{p}_{\lambda i}$).则 $S_v=M(I,V,\Lambda;\bar{P})$是 S 的一个理想.反之，S 的每一个理想都是这样构作的.

证明 先证 T 的理想在诸 $p_{\lambda i}$的作用下是不变的，即 $p_{\lambda i}V\subseteq V$，$Vp_{\lambda i}\subseteq V$，$i\in I$，$\lambda\in\Lambda$.事实上，若 V 是 T 的理想，则$\forall$ a$\in V$，$p_{\lambda i}a=(p_{\lambda i}a^+)a\in V$，$ap_{\lambda i}=a(a^*p_{\lambda i})\in V$，现假设 $\bar{p}_{\lambda i}=p_{\lambda i}|_v$，则易知 $\bar{P}\in\Sigma(V)$.于是 $S_v=M(I,V,\Lambda;\bar{P})$是有意义的.显然 $M(I,V,\Lambda;\bar{P})$是 S 的一个理想.

反之，假设 S_1 是 S 的一个理想，令 $V=\{b\in T\mid(\exists$ i$\in I,\lambda\in\Lambda)$，$(i,b,\lambda)\in S_1\}$，则 V 是 T 的理想.事实上，若$(i,b,\lambda)\in S_1$，则$\forall$ a$\in T$，有$(i,b,\lambda)(i,p^{-1}_{\lambda i}a,\lambda)=(i,ba,\lambda)\in s_1$.类似地，可证$(i,ab,\lambda)\in S_1$.故 $VT\subseteq V$，$TV\subseteq V$.显然 $M(I,V,\Lambda;\bar{P})\supseteq S_1$，又设$(i,c,\lambda)\in M(I,V,\Lambda;\underline{P}$，则 $c\in V$.于是$\exists$ $i_1\in I$，$\lambda_1\in\Lambda$，使得$(_1,c,\lambda_1)\in S_1$.注意到 S_1 是 S 的理想，故我们有$(i,c^+p^{-1}_{\lambda_1 i_1},\lambda)(i_1,c,\lambda_1)(i,p^{-1}_{\lambda_1 i}c^*,\lambda)=(i,c,\lambda)\in S_1$.于是 $M(I,V,\Lambda;\bar{P})\subseteq S_1$，因此，$M(I,V,\Lambda;\bar{P})=S_1$.至此完成定理证明.

参考文献：

[1] A.El-Qaliali and J.B.Fountain.Idempotent-connected abun-

dant semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A91(1981), 79—90.

[2] A. E1 — Qalliali and J. B. Fountain. Quasi-adequate semigroups. Proc. Roy. Soc. Edingburgh. Sect. A91(1981), 91—99.

[3] J. B. Fountain. Adequate semigroups. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)22(1979), 113—125.

[4] J. B. Fountain. Abundant semigroups. Proc. London Math. Soc. 44(1982), 103—129.

[5] Xiaojiang Guo. Idempotent-connected abundant semigroups which are disjoint unions of quasi-ideal adequate transversals. Communications in Algebra, 30(4), 1779—1800(2002).

[6] M. v. Lawson. The structure of type A semigroups. Quart. J. Math. Oxfordser. (2)37(1986), 279—298.

[7] M. v. Lawson. The natural partial order on an abundant semigroup. Proceedings of the Edinburg. Math. Soc. 30(1987), 169—186.

[8] M. Petrich. Completely regular semigroups. New York: John Wiley&Sons Inc, 1999.

The Natural Partial Order on Perfect Rectangular Bands of Type A Semigroups

LI Chun-hua

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we study the natural partial order on perfect rectangular bands of type-A semigroups. It is proved that the natural partial order on perfect rectangular bands of type-A semigroups is compatible with the multiplication. Some properties are given on perfect rectangular bands of type-A semigroups. Finally, we give a structure of ideals to perfect rectangular bands type-A Semigroups.

Key words: type A semigroup; perfect rectangular band; natural partial order