文章编号:1005—0523(2006)02—0150—04

实Hilbert空间中锥的性质及其不动点定理

左黎明[1,2],盛梅波[2],郑雄军[1],董祥南[1]

(1.江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330027;2.华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:在实Hilbert空间中引入新的半序,从而导出实Hilbert空间中的几个新锥,讨论了几种不同的锥的性质,最后证明了几个不动点定理.

关 键 词:半序;Hilbert空间;锥;不动点

中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A

1 引言

长期以来,我们更多的是讨论Banach空间中的锥的性质和不动点定理,得到了许多深刻的结论,但是这些深刻的结论由于缺乏相应的工程应用背景并未得到广泛的重视和应用.由于工程中许多数学分析技术都是在Hilbert空间意义下进行讨论的,例如具有非常良好的应用背景的两大分析技术傅立叶分析和小波分析都是建立在Hilbert空间的基础之上.随着工程技术和相关数学理论的发展,目前已经提出了许多Hilbert空间意义下的非线性问题,因此研究Hilbert空间中非线性问题具有重要的理论和实践意义.众所周知,锥和半序可以相互诱导,一个条件强的半序可以得到一个性质良好的锥,文献[1,2,3,4]讨论就是Banach空间的半序和锥的性质,在该文中,我们主要讨论的是实Hilbert空间中的一些锥及其性质.

2 实Hilbert空间中的锥的定义与性质

约定:设H为实Hilbert空间,对于H中的任意两个元x,y,$<x,y>$为H中的内积,$\|x\|=<x,x>^{1/2}$称为由内积$<x,x>$导出的范数.

定义1 设H为实Hilbert空间,给定$t\in H$,且$t\neq\theta$,定义H上的关系“$\leq_t$”:

$$x\leq_t y\Leftrightarrow\|y-x\|\leq<y,t>-<x,t>=<y-x,t> \quad (1)$$

如: R^3中的给定元素$t=(10,10,10)$,取$a=(3,3,5)$,$b=(4,5,3)$,

$\|a-b\|=\sqrt{1+4+4}=3$,$<b-a,t>=10+20-20=10$,

按照关序的定义,此时有$a\leq_t b\Leftrightarrow\|a-b\|\leq<b-a,t>$.

下面我们用到的关系指的是定义1中的.

引理1 $(H,\leq_t)$是半序空间.

证明:以下证明$(H,\leq_t)$为半序空间.

自反性:$\forall x\in H$,$0=\|x-x\|\leq<x,t>-<x,t>=0$,$\therefore x\leq_t x$,

反对称性:对$\forall x,y\in H$,若$x\leq_t y$且$y\leq_t x$,则$\|y-x\|\leq<y,t>-<x,t>$,

且$\|x-y\|\leq<x,t>-<y,t>$,

所以 $\|x-y\|=0$,即$x=y$;

传递性:$\forall x,y,z\in$,若$x\leq_t y$,$y\leq_t z$,

则由 $\|y-x\|\leq<y,t>-<x,t>$

且 $\|z-y\|\leq<z,t>-<y,t>$,

收稿日期:2005—11—22

基金项目:江西省教育厅资助项目(项目编号:赣教技字[2006]123号)

作者简介:左黎明(1981—),男,江西鹰潭人,助教,软件工程师,主要研究方向:非线性泛函分析,安全工程与数字水印.

从而 $\| z-x \| \le \| z-y \| + \| y-x \| \le <z,t> - <x,t>$,即 $x \le_t z$.

综上可知,$(H,\le_t)$ 是半序空间.容易证明,$(H,\le_t)$ 还是线性空间,因此都是线性半序空间.

令 $P_t=\{x\in H: \theta\le x\}$,则 P_t 具有以下性质:

引理2　P_t 为 H 中的锥.

证明　$P_t=\{x\in H: \| x \| \le <x,t>\}$ 且 $P_t\ne$ 空集,因为 $\theta\in P_t$.设 $x_n\in P_t$,当 $x_n\to x_0$,有 $<x_n,t>\to<x_0,t>$,$\| x_0 \| = \lim\limits_{n\to\infty}\| x_n \| \le \lim\limits_{m\to\infty}<x_n,t> = <x_0,t>$,即 $x_0\in H$,所以 P_t 为闭集.下面我们证明 P_t 为凸集,设 $x,y\in P_t$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,$\alpha+\beta=1$,则:

从而 $\alpha x+\beta y\in P_t$,所以 P_t 为凸集.

若 $x\in P_t$,$\lambda\ge 0\Rightarrow \lambda x\in P_t$,因为 $\| \lambda x \| \le \lambda \| x \| \le \lambda <x,t> = <\lambda x,t>$

$\| \lambda x \| = \lambda \| x \| \le \lambda \le <x,t>$,$\therefore \| x \| = 0$,$\therefore x=\theta$

所以 $x\in P_t$,$-x\in P_t \Rightarrow x=\theta$ 综上所述,P_t 是 H 中一个锥.所以由定义1中的半序可以导出一个锥,易证明由锥的定义也可导出半序,即 $x\le_t y \Leftrightarrow y-x\in P_t$.为叙述方便,半序关系 符号"$\le_t$"就不加区别得记为"$\le$".

定理1　(锥 P_t 的一些性质)

(1)若 $\theta\le x\le y$,则 $\| x \|^2 \le <y,y><t,t>$;

(2)P_t 为 H 中的完全正则锥;

(3)当 $<t,t>>1$ 时,P_t 为再生锥;

(4)H 中的单调递增且有上界的序列必有极限.即若 $x_1\le x_2\le \cdots \le x_n \le \cdots \le y$,

则必存在 $x^*\in H$,$\| x_n - x^* \| \to 0\ (n\to\infty)$ 且 $x_n\le x^*\le y$,$(\forall n\in N)$.

(5)H 中的单调递减且有下界的序列必有极限.即若 $x_1\ge x_2\ge \cdots \ge x_n \ge \cdots \ge y$,

则必存在 $x_*\in H$,$\| x_n - x_* \| \to 0\ (n\to\infty)$ 且 $x_n\ge x^*\ge y$,$(\forall n\in N)$.

注记:以上简单性质的证明只要注意到这样一个事实,由 Riesz 表示定理,对于每一个 $t\in H$,存在 H 上的连续线性泛函 $f_t(x)=<x,t>$,于是我们可以用类似与文献[1,2,3]方法证明上述结论,同时可证文献[1,2,3]中提出的其它定理和性质对于我们定义的锥也是成立的.

设 $\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是 H 中一列两两相互直交的向量,且 $\| e_i \| =1$,其中 $i=1,2,3,\cdots$,$M=span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n,\cdots\}$ 表示有这列正交向量张成的空间.易知 M 为 H 的可分线性子空间,则 M 中任意元 x 可唯一的表示为:

$$x=\sum_i x_i e_i\ (x_i\in R)$$

另外称 $M^\perp=\{x\in H \mid <x,y>=0,\ y\in M\}$ 为 M 的直交补空间,于是由直交分解定理知 $H=M\oplus M^\perp$,且任给 $x\in H$,可作唯一的直交分解:

$x=x_0+y$,$x_0\in M$,$y\in M^\perp$,其中 $x_0=\sum\limits_i x_i e_i$,所以 $x=\sum\limits_i x_i e_i + y$,$(x_i\in R)$.

为了将 H 中元的序关系限制在可分子空间里进行讨论,我们给出下面两个定义.

定义2　$N=\{x\in H \mid x=x_A+x_B,\ x_A\in M,\ x_B\in M^\perp,\ \| x_B \| \le \alpha \| x_A \| \}$,其中 α 为常数且 $\alpha>0$,则 $P_C=P_t\cap N$ 称为 H 中一型可控锥.

定义3　若要求(1)式中 $t\in M$,令 $P_s=\{x\in H \| x \| \le <x,t>,\ t\in M\}$,则 P_s 称为 H 中二型可控锥.$x=x_A+x_B$,$x_A\in M$,$x_B\in M^\perp$,由于 $t\in M$,所以 $\| x \| \le <x,t> = <x_A,t>$ 其中设 $x_A=\sum\limits_i x_i e_i$,$t=\sum\limits_i t_i e_i$,则 $\| x \| = \sum\limits_i x_i t_i$.于是,关于锥的讨论可以限制在 M 中进行.容易看出,P_C 和 P_s 与 P_t 具有与类似的性质,在此不再一一说明.

3　经典不动点定理推广

定理2　设 H 是 Hilbert 空间,$\le$ 是定义1中给出的半序,映射 $A: P_t\to P_t$ 上的单调增算子,即 $x\le y\Rightarrow A(x)\le A(y)$,在 P_t 的一个闭集 D 上内积 $<x,t>$ 有上界,且存在 $x_0\in D$,使得 $x_0\le A(x_0)$,则 A 在 D 上有极大不动点 x.

证明　令 $X_1=\{x\in D: x_0\le x\le A(x)\}$,则 $x_0\in X_1$.下面证明 X_1 有极大元,为此只要证明 X_1 中任意全序子集有上界.设 $\{x_i\}_{i\in I}$ 为 X_1 中的全序子集,其中 I 为定向指标集,$i,j\in I$,$i\le j\Leftrightarrow x_i\le x_j$,从而 $\| x_i - x_j \| \le <x_j - x_i, t>$.$x_i\le x_j \Rightarrow <x_i,t> \le <x_j,t>$,所以 $\{<x_i,t>\}_{i\in I}$ 是单调递增的数列.又因为在 D 上内积 $<x,t>$ 有上界,所以 $\{<x_i,t>\}_{i\in I}$ 收敛.因此 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是 Cauchy 网.设 $\lim\limits_i x_i=\bar{x}\in D$.由 $<x,t>$ 的连续性,$<\bar{x},t>=\lim\limits_i <x_i,t>$.

$\forall i\in I$,$\| x_i-\bar{x} \| = \lim\limits_{i<j,j\to\infty} \| x_i - x_j \| \lim\limits_{i<j,j\to\infty} < x_j - x_i, t> = <\bar{x}-x_i,t>$,因此 $x_i\le \bar{x}$ 对于任给 i 都成立.任给 i,$x_0\le x_i\le \bar{x}$,$x_i\le A(x_i)\le A(\bar{x})$,因此

有：

$\|\bar{x}-A(\bar{x})\|=\lim_{i}\|x_i-A(\bar{x})\|\le\lim_{i}\langle A(\bar{x})-x_i,t\rangle=\langle A(\bar{x})-\bar{x},t\rangle$，所以 $\bar{x}\le A(\bar{x})$.

这就证明$\{x_i\}_{i\in I}$在X_1有上界，由Zorn引理，X_1有极大元$\hat{x}$，由$x_0\le\hat{x}\le A(\hat{x})$，$A(\hat{x})\le A(A(\hat{x}))$，所以$A(\hat{x})\in X_1$且$\hat{x}\le A(\hat{x})$. 由$\hat{x}$为极大元，所以$A(\hat{x})=\hat{x}$，记$x^*=\hat{x}$，则$x^*$为$A$的不动点且为极大不动点.

注记：实际上定理中映射A不一定要是$P_t\to P_t$上的单调增算子，在一般的非空闭子集结论同样也成立，在P_t上讨论，完全是处于实际应用方便的考虑，因为在P_t的非空闭子集上内积$\langle x,t\rangle$有上界容易验证. 在该定理中，不要求A的连续性，以下定理3和定理4皆不要求A的连续性.

定理3　设H是Hilbert空间，$\le$是定义1中给出的半序，$A:[x_0,y_0]\to H$是单调增算子，且满足$x_0\le A(x_0)$，$A(y_0)\le y_0$，则A在$[x_0,y_0]$中存在极大不动点x^*，即若$x\in[x_0,y_0]$是A的不动点，且$x^*\le x$，则$x^*=x$. 同时A在$[x_0,y_0]$中存在极小不动点x，即若$x\in[x_0,y_0]$是A的不动点，且$x\le x_*$，则$x_*=x$，若$x^*=x^*$ A必有不动点.

证明　记$X_1=\{x\in[x_0,y_0]:x\le A(x)\}$，因为$x_0\in X_1$，所以$X_1\ne\phi$. 如同定理2的证明可证，$X_1$有极大元$x^*\in[x_0,y_0]$. 由A的单调性，可知：$x_0\le x^*\le A(x^*)\le A(y_0)\le y_0$，且$A(x^*)\le A(A(x^*))$，从而$A(x^*)\in X_1$，所以$x^*=A(x^*)$且$x^*$是$A$的极大不动点. 同理可证，$A$有极小不动点$x_*\in[x_0,y_0]$.

定理4　设H是Hilbert空间，$\le$是定义1中给出的半序，设$x_0,y_0\in H$，$x_0\le y_0$，记$D=[x_0,y_0]$. $A:D\times D\to H$是混合单调算子，即当$x_1,x_2,y_1,y_2\in D$，$x_1\le x_2$，$y_2\le y_1$时，有$A(x_1,y_1)\le A(x_2,y_2)$，且满足：$x_0\le A(x_0,y_0)$，$A(y_0,x_0)\le y_0$，则：

(1) 存在A的极大极小耦合不动点$(x^*,y^*)\in D\times D$;

(2) 存在A的极小极大耦合不动点$(x_*,y_*)\in D\times D$.

证明　记$C=\{(x,y)\in D\times D:x\le A(x,y),A(y,x)\le y\}$，因为$(x_0,y_0)\in C$. 在$C$上定义半序：$(x_1,y_1)\le_{D\times D}(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1\le x_2,y_2\le y_1$. 同引理(1)易验证($C,\le_{D\times D}$成为半序空间. 下面证明$C$有极大元，设$\{(x_i,y_i)\}_{i\in I}$是$C$中任一全序子集，其中$I$是定向指标集，定义：$i,j\in I$，$i\le_{D\times D}j\Leftrightarrow(x_i,y_i)\le_{D\times D}(x_j,y_j)$，对∀i，j$\in I$，$i\le_{D\times D}j$，可证：

$\langle x_i,t\rangle\le\langle x_j,t\rangle\le\langle y_0,t\rangle$，$\langle x_0,t\rangle\le\langle y_j,t\rangle\le\langle y_i,t\rangle$

于是$\{\langle x_i,t\rangle\}_{i\in I}$单调有上界，$\{\langle y_i,t\rangle\}_{i\in I}$是单调有下界，从而收敛.

因为$x_i\le x_j\Leftrightarrow\|x_j-x_j\|\le\langle x_j-x_i,t\rangle$，故可易证$\{x_j\}_{j\in I}$和$\{y_j\}_{j\in I}$是$H$中的Cauchy网. 设$x_i\to x'$，$y_i\to y'$. 由内积的连续性可知：

$x_0\le x_i\le x'\le y_0$，$x_0\le y'\le y_i\le y_0$，∀i$\in I$

由A的混合单调性，得：

$x_i\le A(x_i,y_i)\le A(x',y')$，$A(y',x')\le A(y_i,x_i)\le y_i$

所以：

$\|x'-A(x',y')\|=\lim_{i}\|x_i-A(x',y')\|\le\lim_{i}\langle A(x'-y')-x_i,t\rangle=\langle A(x',y')-x',t\rangle$，得$x'\le A(x',y')$. 类似可证明，$A(y',x')\le y'$，所以$(x',y')\in C$，且$(x_i,y_i)\le_{D\times D}(x',y')$，∀i$\in I$，即$(x',y')$是$\{(x_i,y_i)\}_{i\in I}$的一个上界. 应用Zorn引理，$C$有极大元$(x^*,y^*)$，下证$(A(x^*,y^*),A(y^*,x^*))\in C$，且$(x^*,y^*)\le_{D\times D}(A(x^*,y^*),A(y^*,x^*))$.

$x_0\le x^*\le A(x^*,y^*)\le A(y_0,x_0)\le y_0$，$x_0\le A(x_0,y_0)\le A(y^*,x^*)\le y^*\le y_0$，

$A(x^*,y^*)\le A(A(x^*,y^*),A(y^*,x^*))$，$A(A(y^*,x^*),A(x^*,y^*))\le A(y^*,x^*)$.

$A(x^*,y^*)\le A(A(x^*,y^*),A(y^*,x^*))$，$A(A(y^*,x^*),A(x^*,y^*))\le A(y^*,x^*)$.

由于(x^*,y^*)是C的极大元，$(x^*,y^*)=(A(x^*,y^*),A(y^*,x^*))$. 所以$(x^*,y^*)$是的极大耦合不动点.

类似可证明，存在A的极小极大耦合不动点(x_*,y_*).

定理5　设H是Hilbert空间，$\le$是定义1中给出的半序. $A:H\to H$为H上的增算子. 如果存在线性有界算子$B:H\to H$，$\|B\|\le1/\|t\|$，使$B(x-y)\ge Ay-Ax$，∀x，y$\in H$，$x\le y$，则A在H中有唯一的不动点x^*. 并且∀$x_0\in H$，令$x_n=A(x_{n-1})$，$(n=1,2,3,...)$，必有$x_n\to x^*(n\to\infty)$.

证明　$A:B\to H$为H上的增算子，所以∀x，y$\in H$，$x\le y$，$Ax\le Ay$，即：

$\|Ax-Ay\|\le\langle Ay-Ax,t\rangle$

由定义1知:$x\leq y \Rightarrow <x,t>\leq<y,t>$,因为 $B(x-y)\geq Ay-Ax$,$\forall$ x,y$\in H$,$x\leq y$,所以:$\| Ax-Ay \|\leq<Ay-Ax,t>\leq<B(x-y),t>\leq\| B(x-y)\|\cdot\| t\|\leq\| B\|\cdot\| t\|\cdot\| x-y\|$

令 $\lambda=\| B\|\cdot\| t\|$,因为 $\| B\|\leq 1/\| t\|$,所以 $\lambda<1$,故 A 为压缩算子,由压缩映象原理知,A 在 H 中有唯一的不动点 x^*.并且 $\forall$ $x_0\in H$,令 $x_n=A(x_{n-1})$,$(n=1,2,3,\Lambda)$,必有 $x_n\to x^*$ $(n\to\infty)$.

定理6 设 H 是 Hilbert 空间,$\leq$是定义1中给出的半序.$A:H\to$为单调增算子,S_1,S_2 为 H 中的凸闭集且 $S_1\subset S_2$,且 $\forall$ $x_1\in\partial S_1$,$Ax_1\geq x_1$,$\forall$ $x_2\in\partial S_2$,$Ax_2\leq x_2$,则 A 在 $S=\overline{S_2-S_1}$内必存在不动点.

证明 略(注记:选择一个方向进行,证明过程如定理2,3).

参考文献:

[1] 张 宪.半序赋范空间及增算子的不动点定理[J].应用泛函分析学报,2001,3.

[2] 张 宪.锥的若干性质[J].应用泛函分析学报,2005,7.

[3] 郭大均.非线性分析中的半序方法[M].济南:山东科技大学出版社,2000.

[4] 郭大均.非线性泛函分析[M].济南:山东科技大学出版社,2004.

Some Properties of Cone and Fix Point Theorem In Hilbert Space

ZUO Li-ming,SHENG Mei-bo,ZHENG Xiong-jun,DONG Xiang-nan

(1.Institute of Mathematics and Informatics,Normal Uni.,Jiangxi Nanchang 330027;2.School of Natural Science,East China Jiaotong Uni.,Nanchang 330013,China)

Abstract:In Hilbert space we define a new partial order. By the partial order we construct several cones and discuss properties of the cone. Finally,we give some fixed point theorem.

Key words:partial order; Hilbert space; cone; fixed point