

文章编号: 1005—0523(2006)02—0166—05

基于 CD_aR 的投资组合优化模型

颜立军, 唐邵玲

(湖南师范大学 数学与计算机科学学院概率统计系, 湖南 长沙 410081)

摘要: 主要介绍以损失函数 $DD(x)$ 、最大损失函数 $MD(x)$ 和平均损失函数 $AD(X)$ 为基础的测度金融风险的新型工具—— DaR 模型和 $CDaR$ 模型及其特点; 重点讨论如何依据投资者的风险偏好建立基于 $CDaR$ 的投资组合收益—风险优化模型, 并将其转化为易于求解的线性规划(LP)模型; 结合我国上证 A 股市场实证分析的结果表明, 该模型能最大限度地满足投资者不同风险偏好和风险容忍水平的约束, 快捷、方便地求得最优投资组合。

关 键 词: $CDaR$; 投资组合; 优化模型

中图分类号: $TP391.41$

文献标识码: A

1 引言

投资决策是金融经济活动中最基本的决策之一, 也是金融经济学研究的重点. 投资决策的数学本质是一个带有约束的最优化问题, 不同的优化目标选择导致了不同的投资决策方法. 在金融领域, 通常的投资决策目标是对风险和收益的综合考虑, 最经典的 *Markowitz* 的均值—方差模型, 由于计算的简单性在金融决策中得到广泛使用. 但从风险的角度看, 方差并不是一个令人满意的风险度量.

20 世纪 90 年代发展起来的应用于金融经济领域的一种风险度量工具 VaR , 由于其测量的综合性, 可以将不同的市场因子、不同市场的风险集成为一个数, 较准确测量由不同风险来源及其相互作用而产生的潜在损失, 较好地适应了金融市场发展的动态性、复杂性和全球整合性趋势^[1]. 因此, 在风险测量、监管等领域获得广泛应用, 成为金融市场风险测量的主流方法. 然而, 由于所依据的统计方法自身的局限性, VaR 在实际运用中存在着诸多缺陷, 其主要缺陷表现在三个方面: 一是没有考虑尾部风险(损失超过 VaR 的风险), 因而无法防范极端事件. 二是不满足一般风险度量模型所具有的次可加性^[2], 使得金融机构不能通过计算各分支机构 VaR 来推导整个金融机构的 VaR . 三是优化问题求解困难. 在进行投资组合优化时, 以 VaR 为目标函数的规划问题一般不是凸规划, 其局部最优解不一定是全局最优解, 在求

解时也会遇到很大困难. 理论界最近提出了一类风险度量新工具—— DaR 与 $CDaR$ 模型, 较好地解决了 VaR 的上述缺陷.

2 DaR 模型与 $CDaR$ 模型

DaR (*Drawdown at Risk*), 从字面上解释就是“处在风险中的损失”, 我们简称为风险损失; $CDaR$ (*Conditional Drawdown at Risk*), 即条件 DaR , 它们是 *Alexei Clekhlov* 等人在 2000 年的研究报告中首次提出的一类度量金融风险的新方法^{[4][5]}. 两者与 VaR 的最大区别在于, VaR 是以资产组合回报的损益分布为基础, 而 DaR 与 $CDaR$ 模型是建立在损失函数 $DD(x)$ 、最大损失函数 $MD(x)$ 和平均损失函数 $AD(X)$ 的概念上.

1) 损失函数 $DD(x)$ 、最大损失函数 $MD(x)$ 和平均损失函数 $AD(X)$ 的定义

设 $w(x, t)$ 是投资组合在 t 时刻的回报, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 种资产的投资权重, 组合在 t 时刻的损失函数 $DD(x, t)$ 、最大损失函数 $MD(x)$ 和平均损失函数 $AD(x)$ 的定义如下:

$$\begin{aligned} DD(x, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} \{w(x, \tau)\} - w(x, t) \\ MD(x) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} \{DD(x, \tau)\} \\ AD(x) &= \frac{1}{T} \int_0^T DD(x, t) dt \end{aligned}$$

收稿日期: 2005—09—15

基金项目: 高校博士点专项科研基金资助(20040542006)

作者简介: 颜立军(一), 湖南师大数学与计算机学院概率统计系研究生, 研究方向: 金融风险与金融计量分析.

2) DaR (Drawdown at Risk)模型

DaR 较为正式的定义由 B. V. de Melo Mendes, et (2004) 提出^[6],在形式上与 VaR 的定义类似,但 DaR 是以损失函数 DD 的分布为基础:

$$DaR_{\alpha}(DD)=\inf\{x \mid p[DD>x] \leq \alpha\}$$

上式表明: DaR 就是 DD 分布中的一个分位数,表示某项资产或资产组合在一定时期内其损失超过一定水平的可能性,也就是一定时期内在一定置信水平 α 下由某项投资或投资组合引起的损失的上限.目前计算 DaR 的大小主要是采用参数分析方法 (Stephan. Jorh, 2004)^[7],往往假定损失函数服从学生 t -分布或 Pareto 分布,通过估计损失函数分布的参数来求得与选定置信水平 α 所对应的分位数,计 DaR 算的大小.从 DaR 的定义及其表达式来看,它本身并不具有比 VaR 更大的优越性,但由 DaR 衍生出的 CDaR 却能克服 VaR 的诸多缺陷.

3) CDaR 模型 (Conditional Drawdown-at-Risk)

CDaR 即条件 DaR,是由 DaR 模型衍生出来的一种金融风险度量新工具.简单地说,对任意 $\alpha \in [0, 1]$, CDaR 就是投资组合损失函数分布中最坏的 $(1-\alpha) \times 100\%$ 情况的平均值,常用符号 $\Delta_{\alpha}(x)$ 表示. VaR、DaR 和 CDaR 的意义可用下列图 1、图 2 来表示:

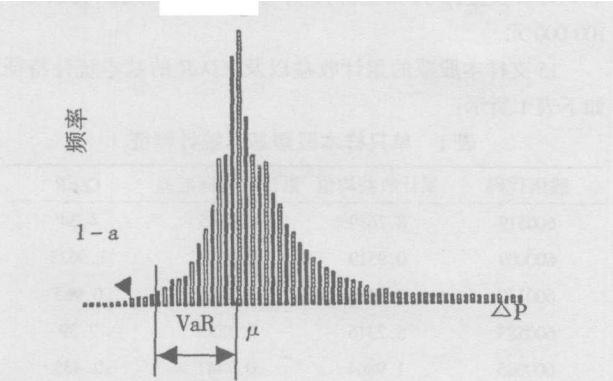


图 1 基于损益分布的 VaR

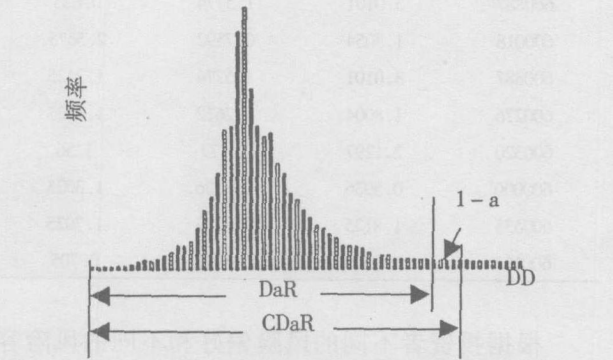


图 2 基于损失函数分布的 DaR 和 CDaR

由图 2 可以看出,极端情况下,当 $\alpha=1$ 时, CDaR 就是投资组合在 $[0, T]$ 期间的最大损失,即 $\Delta_1(X) = MD(X)$;当 $\alpha=0$ 时, CDaR 就是投资组合在 $[0, T]$ 期间的平均损失,即

$\Delta_0(X) = AD(X)$.如果 $\alpha=0.95$,那么 CDaR 就是最坏的 5% 的损失的平均值.一般情况下, CDaR 比 DaR 大.显然 CDaR 考虑的是尾部风险,即最坏 α 情况的所有情况,所以它能预测当市场出现剧烈波动时的极端情形,为风险管理者考虑那些极少发生但会造成很大损失的事件提供了有利的工具.

(1) CDaR 的正式定义

假设用 N 表示在 $[0, T]$ 这段时间内分成的小区间数, $\alpha \in [0, T]$ 代表置信水平,根据 $(1-\alpha)N$ 的值是否为整数,我们分以下两种情形定义 CDaR.

① 特殊情形: $(1-\alpha)N$ 为整数

如果 $(1-\alpha)N$ 是一个整数, CDaR 直接就是全部最大损失中最坏的 $(1-\alpha) \times 100\%$ 个损失的平均值.若用 $\zeta_{\alpha}(x)$ 表示一个阈,则满足 $(1-\alpha) \times 100\%$ 的最大损失恰好不小于这个阈,这就是置信水平为 α ,投资期间为 $[0, T]$ 的 CDaR,简称 α -CDaR,即:

$$\Delta_{\alpha}(x) = \frac{1}{(1-\alpha)T} \int_{\Omega_{\alpha}} DD(x, t) dt$$

其中 $\Omega_{\alpha} = \{t \in [0, T], DD(x, t) \geq \zeta_{\alpha}(x)\}$.

② 一般情形: $(1-\alpha)N$ 为非整数

若 $(1-\alpha)N$ 为非整数,则 CDaR 的定义如下:

$$\Delta_{\alpha}(x) = \min\left\{\zeta + \frac{1}{(1-\alpha)T} \int_0^T [DD(x, t) - \zeta]^+ dt\right\}$$

其中 $[g]^+ = \max\{0, g\}$,当 $(1-\alpha)N$ 为整数,则 $\zeta = \zeta_{\alpha}(x)$,否则 $\zeta \geq \zeta_{\alpha}(x)$.

根据上述定义,可以证明, CDaR 和 DaR 有如下关系^[9]:

$$CDaR_{\alpha} = \lambda DaR_{\alpha} + (1-\lambda) CDaR_{\alpha}^{+}$$

$$\lambda = \frac{P[DD \geq DaR_{\alpha}] - \alpha}{\alpha}$$

$$CDaR^{+} = E[DD \mid DD > DaR_{\alpha}]$$

(2) CDaR 的性质:

由 Alexei Clekhlov (2003)^[8]等人证明 CDaR 有下列性质:

- ① 非负性: $\Delta_{\alpha}(x) \geq 0, \forall \alpha \in [0, 1]$;
- ② 平移不变性: $\Delta_{\alpha}(x+c) = \Delta_{\alpha}(x), \forall \alpha \in [0, 1], c$ 为常数;
- ③ 正齐性: $\Delta_{\alpha}(\lambda x) = \lambda \Delta_{\alpha}(x) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall \alpha \in [0, 1]$;
- ④ 凸性: $\Delta_{\alpha}(\lambda x_a + (1-\lambda) x_b) \leq \lambda \Delta_{\alpha}(x_a) + (1-\lambda) \Delta_{\alpha}(x_b), \forall \lambda \in [0, 1]$

CDaR 所具备的次可加性(即凸性),意味着投资组合的风险损失不会超过其各组成部分的风险损失之和,只有当各个部分的风险完全正相关时,整体风险才等于各个部分的风险之和;反之,由于分散化效应,整体风险将小于部分风险之和.因此,采用 CDaR 度量金融风险,可通过计算各分支机构的来推导整个金融机构的风险损失.更重要的是,基于 CDaR 对证券组合进行优化时,凸性的存在意味着局部极小值就是全局最小值,大大简化了投资组合优化问题的求解过程.

3 基于 CDaR 的投资优化模型

当从价值损失的角度建立投资组合优化模型时,目标函数一般选取收益最大化,而约束条件则取决于投资者的风险偏好.本文将考虑中国证券市场的实际情况,考虑一种基于 CDaR 的投资优化模型.建模时我们将投资者给出的 CDaR 容忍水平,转化为相应的约束条件如 $\triangle_{\alpha}(x)\leq\omega$.其中 c 表示可以获得的资金, $c=\sum_{j=1}^m p_j^0\cdot x_j$, x_j 表示第 j 种投资工具的数量, p_j^0 表示投资期初第 j 种投资工具的价格;系数 v 表示“允许的损失比率”,即风险容忍水平,且有 $0\leq v\leq 1$. α 表示置信水平.

假设某一组合资产的回报为 $r_j(1), r_j(2), \dots, r_j(N), 1\leq j\leq m$, 下标 j 表示第 j 种可获得的投资工具; $y_j(t)=\sum_{k=1}^t r_j(k)$ 表示第 j 个投资工具到目前时刻 t 为止的累积回报;向量 $y(t)=(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ 表示 m 种组合工具在时刻 t 的累积回报;组合资产的累计回报为 $w(x, t)=y(t) \cdot x=\sum_{j=1}^m y_j(t) \cdot x_j$. 那么在 $[0, T]$ 这段时间内,组合平均回报 $R(X)$ 是关于 x 的线性函数: $R(X)=w(x, N)=y(N) \cdot x$. 基于 CDaR 的投资组合优化模型的建模过程如下:

我们对未来可能出现的 N 种情况,可采用历史模拟法的方法,取过去 m 种证券的 N 个交易日的收益率,将函数 $\triangle_{\alpha}(x)$ 近似地表示为:

$$\triangle_{\alpha}(x)=\zeta+\frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{k=1}^N[\max_{1\leq j\leq k}\{y_j\cdot x\}-y_k\cdot x-\zeta]^+$$

此时,投资组合优化模型可表示如下:

$$\max_{x\in X} y_N\cdot x$$

$$\text{满足 } \zeta+\frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{1\leq j\leq k} \{y_j\cdot x\}-y_k\cdot x-\zeta]^+\leq\omega$$

这里 $\triangle_{\alpha}(x)$ 关于 α 是凸的分段线性函数,它关于 α 不一定可微,但是我们可用线性规划的方法,通过设置虚拟变量 $u_k, z_k(1\leq k\leq N)$ 求其最优解.

即: $\max_{x\in X} y_N\cdot x$

满足:

$$\begin{cases} \zeta+\frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{k=1}^N z_k\leq\omega_3 \\ z_k\geq u_k-y_k\cdot x-\zeta, 1\leq k\leq N, \\ z_k\geq 0 \quad 1\leq k\leq N \\ u_k\geq y_k\cdot x, 1\leq k\leq N, \\ u_k\geq u_{k-1}, 1\leq k\leq N, \\ u_0=0 \\ c=\sum_{j=1}^m p_j^0\cdot x_j \quad x_j\geq 0 \quad j=1\ldots m \end{cases}$$

应当注意以下四点:

其一,这里采用的是离散方法,用 $\zeta+\frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{k=1}^N[\max_{1\leq j\leq k}$

$\{y_j\cdot x\}-y_k\cdot x-\zeta]^+\leq\omega_1$ 近似地表示 $\triangle_{\alpha}(x)$;其二,此方法的重要特征是没有包括阈函数 $\zeta_{\alpha}(x)$ (所以我们不必知道原损失函数 $DD(X)$ 的具体分布函数),但解决了这个优化问题后,变量 x, ζ 就给出了一个优化组合和相应的阈函数值.其三,不同的投资者可以根据自己的风险偏好水平和实际情况,选择合适的 c, v, α 值.其四,基于 CDaR 的优化问题是一个分段的规划问题,通过引入适当的辅助变量,就可以转化为标准的线性规划(LP)问题.求解时,不仅有许多现成的商品软件如 *Lindo*、*Matlab* 可供使用(下面的实证分析我们采用的是 *Matlab* 优化工具箱),且计算速度也比其它算法(如遗传算法、神经网络算法)来得快.

4 实证分析

我们首先从上海证券 A 股市场中随机抽取 42 支股票,然后选取其中的 2002 年 9 月前上市的且 2005 年半年报告中平均收益率大于 0.2 的 15 支股票作为一个资产组合,即 $m=15$;样本的原始数据为 2005 年 1 月 6 日至 2005 年 5 月 18 日(共 80 天,即 $N=80$)的样本股票的日收盘价,计算相应的日收益,公式 $r_j(t-1)=p_j(t)-p_j(t-1) \quad t=2, \dots, 80$, 其中 r 为日收益, p 为收盘价, t 为时间;假设初始投资额 $c=100\,000$ 元.

15 支样本股票的累计收益以及 CDaR 的基本统计特征如下表 1 所示:

表 1 单只样本股票基本统计特征			
股票代码	累计收益均值	累计收益标准差	CDaR
600519	8.2639	4.8145	4.34
600009	0.9519	0.5888	1.9675
600150	0.9475	0.5886	0.965
600583	5.2316	3.3583	7.39
600085	1.9804	0.7447	2.435
600415	2.0096	2.0186	3.5975
600018	1.3054	0.7592	5.6825
600887	3.0101	1.5774	0.625
600018	1.3054	0.7592	2.5675
600887	3.0101	1.5774	1.2425
600276	1.8004	1.2612	1.3925
600320	2.1297	1.177	3.56
600000	0.5936	0.3856	1.3025
600535	1.8125	0.8333	1.7025
600125	1.0549	0.8921	0.705

根据投资者不同的风险偏好和不同的风险容忍水平 v ,我们采用 MATLAB 优化工具箱依次对上述模型求出对应 10 种风险容忍水平的最优组合,其结果如下表 2 所示.

表 2 基于 CDaR 函数模型的优化结果(1- α=0.05)

股票代码	0.053	0.054	0.055	0.058	0.06	0.061 *	0.062	0.070	0.080	0.100
600519	673	844	764	316	46	0	0	0	0	0
600009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600583	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600085	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600415	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600309	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600018	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600887	0	0	335	2013	2771	3047	3084	3456	3969	5482
600276	694	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600320	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600000	5997	5419	5236	5528	5276	5307	5132	3844	2310	0
600535	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6001253256	4014	4149	4054	4626	4502	4603	5242	5923	6131	
组合收益	18659	20178	20938	22859	24078	24499	24833	27505	30841	37485
组合 CDaR	4737.5	4965	4799.1	5094.6	5154.4	5199	5303.6	6060.9	6953.4	8928.9
收益/风险	3.939	4.064	4.363	4.487	4.671	4.712 *	4.682	4.538	4.435	4.198

注:表 2 列出了该模型对应不同 v 值的 10 个优化组合.模型中风险容忍水平 v 的第一个取值是使得各组合优化模型有解的最小值(用 MATLAB 反复试算 LP 模型求得).

上述实证结果可知:

1) 用 CDaR 度量组合风险,优化结果表明:组合中入选股票的种数越多,风险越小,组合收益亦越小,而较高的组合风险则对应有较高的回报,验证了资产组合风险与资产收益率之间的现代投资理论学说.

2) 上述投资组合优化模型,求解过程中并没有假设收益的具体分布,但通过解优化模型就给出了对应的 CDaR 值,这也提供了一种计算组合资产 CDaR 的方法.

3) 当我们采用风险调整的绩效评估方法(RAROC 方法),通过计算各组合的收益/风险值(即承担单位资本损失所获得的收益)来评估模型时,收益/风险值与风险容忍水平 v 均存在非线性关系,收益/风险值随 v 的增加先增后减,有极大值(如表 2 中带“*”的组合).这说明与其他优化模型相比,此类模型能最大限度地满足投资者不同风险偏好和风险容忍水平的约束,并可快捷、方便地求得最优投资组合,具有很强的实用性和便利性.投资者可以根据自己所拥有的资金额 C 和风险偏好,确定最佳风险容忍水平和最优投资方案.

5 结语

通过上文的讨论和分析,我们发现作为一种新的风险度量工具,CDaR 模型较 VaR 有较多优势:其一,上述投资组合优化模型,求解过程中并没有假设收益的具体分布,因此适用性广;其二,优化模型都能通过适当地引入辅助变量转

化为简单的 LP 问题,求解快捷、方便;其三,不同的投资者只要依据不同的风险偏好选择资金 c 和风险容忍水平 v 及其置信水平 α 就能快捷地得到投资组合的优化方案,因此该算法直观、简洁、容易理解,适合于不同风险偏好的投资者进行投资决策和管理.但是,到目前为止,CDaR 方法及其优化模型也还存在三大不足:一是计算 CDaR 时对未来价格的模拟是基于历史数据,一旦价格的未来分布与历史分布差别过大,计算的结果就会不太准确;二是 CDaR 的计算是在小样本的基础上用离散化的方法近似地计算的,有一定误差;三是上述优化模型,没有考虑市场的摩擦因素和投资实务中的其它约束,如:交易成本、最小交易规模、单一证券价格在整個投资组合价值中所占比例的上限和下限以及进入优化组合的股票种类数限制等等,而忽略这些约束条件对投资者的最优决策肯定会产生一定的影响.怎样改进 CDaR 的计算方法和投资组合优化模型,进一步地是否可以探讨基于 DaR 的优化模型,这些还有待于人们做进一步的研究.

参考文献:

[1] 王春峰.金融市场风险管理[M].天津:天津大学出版社,2001.

[2] Carlo Acerbi, Claudio Nardio, Carlo Sirtori. Expected shortfall as a tool for financial risk management [DB/OL]. 3 Beder T. Var Seductive but dangerous [J]. Financial Analysts Journal, 1995(9/10): 12—24.

[3] McKay R, Keefer T E. VaR is a dangerous technique[J]. Corpo-

rate Financial Searching for Systems Integration Supplemnt. 1996(9).30.
<http://www.gloriamundi.org/var/vw/20010210.htm>, 2001—02—10.

[4] A. Chekhlov, S. Uryasev and M. Zabarankin. Portfolio Optimization with Drawdown Constraints[J]. THEORY PROBAB. APPL. VOL. 44, No. 1, 2000.

[5] A. Chekhlov, S. Uryasev and M. Zabarankin. Drawdown Measure in Portfolio Optimization[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, V. 8, No. 1, 2005.

[6] B. V. de. Melo Mendes and R. P. Camara Leal. Maximum Drawdown: Models and Applications [J]. working paper [J], Federal University at Rio de Janeiro, 2004.

[7] Stephan Johri, PD. Dr. Diethelm Würtc, Dr. kai. Nagel Portfolio optimization with hedge funds; Conditional Value At Risk And Conditional Draw-Down At Risk For Portfolio Optimization With Alternative Investments[J]. March 16, 2004.

[8] Alexei Chekhlov, Stanislav Uryasev, Michael Zabarankin. Draw-down Measure in Portfolio Optimization Research Report [J]. 2003.

Investment Portfolio Optimization Model Based on Conditional Drawdown-at-Risk

YAN Li-jun, TANG Shao-ling

(School of Mathematics and Computer science; Hunan Normal University, Changsha, 410080, China)

Abstract: In this article, we mainly introduce a new tool of measuring risk—DaR model and CDaR model and their characteristic. These models are based on the Drawdown function and the Maximal drawdown function and the Average draw-down function. We mainly discuss how to establish Investment portfolio optimization model based on Conditional Draw-down-at-Risk according to investors’ risk lover and transform them into the linear programming (LP) model. From the analysed result of the A market’s of our country, we know this model can greatly satisfy the investors’ s different risk lover and different risk tolerance horizontals, and can obtain the most superior investment portfolio quickly and conveniently.

Key words: CDaR; investment portfolio; optimized model.

(上接第 165 页)

The Implement of Group Signature in Examination Management System

YU Gui-hai

Abstract: This paper introduces the safety and unity in examination management system, and describes the implement of group signature.

Key words: digital signature; group signature; data management