文章编号:1005-0523(2006)02-0171-02

两两NQD序列下非参数回归函数估计的相合性

黄　娟,李乃医

(广东海洋大学 理学院数学系,湛江 524088)

摘要:在两两NQD序列误差下讨论Priestly,M.B.和Chao,M.T.[1]提出的一类给参数回归函数加权核估计的相合性.

关 键 词:NQD序列误差;非参数回归函数;加权核估计;矩相合;强相合

中图分类号:0212.7　　**文献标识码**:A

1 引言

定义 称 $r.v.X$ 和 Y 是两两NQD的(Negatively Quardrant Dependent),若对 $\forall x,y\in R$ 有 $P(X<x,Y<y)\leq P(X<x)P(Y<y)$.称 $\{X_n,n\geq 1\}$ 列是两两 NQD 的,若对 $i\neq j$, X_i 和 X_j 是NQD的.

两两NQD序列是一类较为一般的相依 $r.v.$ 序列,如后来出现的可靠性、多元统计分析等理论中有着广泛应用的NA列(Negatively Associated)就是它的特殊情况之一.因此,对两两NQD序列的研究具有理论上的普遍意义和实践上的实用价值.

设 Y_1,Y_2,Λ,Y_n 是固定点 x_1,x_2,Λ,x_n 的 n 个观察值,适合模型

$$Y_i=g(x_i)+\varepsilon_i,1\leq i\leq n.$$

其中 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的未知函数,且把 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 外的值定义为0, $\{\varepsilon_i\}$ 是随机误差序列,且假定 $0=x_0\leq x_1\leq x_2\leq\Lambda\leq x_{n-1}\leq x_n=1$.Priestly和Chao[1]对未知函数 $g(x)$ 提出了一种加权核估计 $g_n(x)=\sum_{i=1}^{n}Y_i\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})$,

其中 $K(u)$ 是Borel可测函数, $0<h_n\to 0$(当 $n\to\infty$).

本文在两两NQD误差序列情形下,分别给出 $g_n(x)$ 的矩相合性和强相合性的充分条件.

记 $\delta_n=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$,全文将使用如下基本条件:

(a) $K(\cdot)$ 在 R^1 上满足 $\beta(\beta>0)$ 阶Lipschitz条件,且 $\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)du=1$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|du<\infty$, $K(\cdot)$ 在 R^1 上有界;

(b) $G(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $\alpha(\alpha>0)$ 阶Lipschitz条件;

(c) 当 $n\to\infty$ 时, $h_n\to 0$ 和 $\delta_n\to 0$;

(d) 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{h_n}\{(\frac{\delta_n}{h_n})^{\beta}+\delta_n^{\alpha}\}\to 0$.

2 主要的结论

定理1 设基本条件(a)~(d)成立.又设

(1) $\{\varepsilon_i,i\geq 1\}$ 为两两NQD序列, $E\varepsilon_i=0$,并存在 $r\geq 2$ 使得 $\sup_{1\leq i\leq n}E|\varepsilon_i|^r\leq M<\infty$(其中为正常数);

(2) 当 $n\to\infty$ 时, $(\frac{\delta_n}{h_n})^r n^{\frac{r}{2}}\to 0$,则

$$\lim_{n\to\infty}E|g_n(x)-g(x)|^r=0.$$

定理2 设基本条件(a)~(d)成立.又设

(1) $\{\varepsilon_i,i\geq 1\}$ 为两两NQD序列, $E\varepsilon_i=0$,并存在 $r\geq 2$ 使得 $\sup_{1\leq i\leq n}E|\varepsilon_i|^r\leq M<\infty$(其中为正常数);

(2) $n\to\infty$ 当时, $(\frac{\delta_n}{h_n})^r n^{\frac{r+1}{2}}\to 0$,则

收稿日期:2005-08-14

作者简介:黄娟(1978-),女,江西高安人,硕士,从事概率统计研究.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x), a.s.$$

引理 1[2] 设 $r.v. X$ 和 Y 是两两NQD的，则

(1) $EXY\leq EXEY$；

(2) $P(X<x, Y<y)\leq P(X<x)P(Y<y)$；

(3)若 $f(\cdot)$，$g(\cdot)$ 同为非降或非增函数，则 $f(X)$ 和 $g(X)$ 仍为NQD的.

引理 2[3] 设 $\{X_i, i\geq 1\}$ 为两两NQD序列，且对任意的 $1\geq 1$，$EX_i=0$，$E|X_n|^q<\infty$，其中 $q\geq 2$，则存在不依赖于的常数 $c>0$，使得

$$E|\sum_{i=1}^n X_i|^q\leq c\{\sum_{i=1}^n E|X_i|^q+(\sum_{i=1}^n EX_i^2)^{\frac{q}{2}}\}.$$

引理 3[4] 设基本条件 $(a)\sim(d)$ 成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty} Eg_n(x)=g(x)$.

3 定理的证明

定理 1 的证明 因为

$$g_n(x)-g(x)=\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})+(Eg_n(x)-g(x)):=\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i+(Eg_n(x)-g(x)).$$

其中 $b_{n_i}=\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i)}{h_n})$.

由 C_r 不等式得 $E|g_n(x)-g(x)|^r=C_1E|\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i|^r+C_2|Eg_n(x)-g(x)|^r:=I_1+I_2$.

由引理2知 $I_2\to 0$ 从而只需证明 $I_1\to 0$.

由引理1知

$$I_1=C_1E|\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i|^r\leq C_1\{\sum_{i=1}^n b_{n_i}^r E|\varepsilon_i|^r+[\sum_{i=1}^n E(b_{n_i}\varepsilon_i)^2]^{\frac{r}{2}}\}\leq C_1\{\sum_{i=1}^n(\frac{\delta_n}{h_n})^r\sup_{1\leq i\leq n}E|\varepsilon_i|^r+[n(\frac{\delta_n}{h_n})^2\sup_{1\leq i\leq n}E\varepsilon_i^2]^{\frac{r}{2}}\}\leq C_1n(\frac{\delta_n}{h_n})^r+C_1n^{\frac{r}{2}}(\frac{\delta_n}{h_n})^r\leq C_1n^{\frac{r}{2}}(\frac{\delta_n}{h_n})^r.$$

其中 C_1 在不同的地方可以取不同的常数.

由定理1中的条件(2)可得 $I_1\to 0$.证毕.

定理 2 的证明 因为

$$g_n(x)-g(x)=\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K(\frac{x-x_i}{h_n})+(Eg_n(x)-g(x))=\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i+(Eg_n(x)-g(x)):=J_1+J_2.$$

由引理3知 $J_2\to 0$ 从而只需证明 $J_1\to 0, a.s.$

利用引理2，对于 $\forall\varepsilon>0$，

$$P\{|\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i|>\varepsilon\}\leq\frac{E|\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i+|^r}{\varepsilon^r}$$

$$\leq C_1\frac{\{\sum_{i=1}^n b_{n_i}^r E|\varepsilon_i|^r+[\sum_{i=1}^n E(b_{n_i}^2\varepsilon_i^2)]^{\frac{r}{2}}\}}{\varepsilon^r}$$

$$\leq C_1\frac{\{n(\frac{\delta_n}{h_n})^r\sup_{1\leq i\leq n}E\varepsilon_i^r+n^{\frac{r}{2}}(\frac{\delta_n}{h_n})^r(\sup_{1\leq i\leq n}E|\varepsilon_i^2|^{\frac{r}{2}}}{\varepsilon^r}\leq C_1n^{\frac{r}{2}}(\frac{\delta_n}{h_n})^r.$$

由定理2的条件(2)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|\sum_{i=1}^n b_{n_i}\varepsilon_i|>\varepsilon\}<\infty.$$

从而由Borel—Cantelli引理知 $J_1\to 0, a.s.$证毕.

参考文献：

[1] Priestley，M.B. and Chao，M.T.Nonparametric function fitting，J.R.Statist.Soc.b，34(1972)，385—392.

[2] LEHMANNEL. Some concept of dependence[J].Ann.Math.Statist，1963，(43)：1137—1153.

[3] 安 军.两两NQD列部分和的不等式及弱大数律[J].重庆工商大学学报(自然科学版)，2004，21(3)：209—212.

[4] 秦永松.相依误差下非参数回归函数估计的强相合性[J].广西师范大学学报，10：2(1992)，24—27.

Consistency of Estimators of Nonparametric Regression Functions for Pairwise NQD Sequences

HUANG Juan，LI Nai-yi

(Guangdong Ocean University，Zhanjiang 524088，China)

Abstract：Under Pairwise NQD Sequences error，we discuss the consistency of weighted kernel estimators of nonparametric regression functions of which Priestly，M.B. and Chao，M.T.[1] bring out.

Key words：Pairwise NQD Sequences error；nonparametric regression functions；weighted kernel estimators；moment consistency；strong consistency