

文章编号: 1005—0523(2006)02—0122—05

幂等元双半环上的 Green D—关系

张 伟¹, 左黎明², 王颂生¹

(1. 江西师范大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022; 2. 华东交通大学, 江西 南昌 330013)

摘要:通过对幂等元双半环中三个幂等元半环上的 Green D—关系交的讨论, 研究了幂等元双半环上的 Green D—关系, 从而给出了幂等元双半环上满足三个 Green D—关系交的充要条件, 且对三个 Green D—关系的交是上的同余作了进一步刻划.

关 键 词: 幂等元双半环; 幂等元半环; Green D—关系; 同余

中图分类号: O153.3

文献标识码: A

1 引言

双半环是一个比半环和分配格序半群更一般的概念, 文献[1]讨论了双半环的一些基本性质, 并对一类双半环上的同余进行了刻划, 而 Green—关系是半环上的几个非常重要的等价关系, 从其出发文献[2~5]对幂等元半环上的 Green—关系进行了研究, 取得了一些重要的结果. 本文则给出了幂等元双半环上的元素满足三个 Green D—关系交的充要条件, 并对三个 Green D—关系的交是上的同余作了进一步刻划.

2 预备知识

定义 1^[1] 称一非空集合 S 为双半环, 如果 S 上定义有三个代数运算“+”, “*”, “·”, 且满足:

(1) $(S, \cdot), (S, +), (S, *)$ 均为半群, 且 $0 \in S$,

(2) $\forall a, b, c \in S$ 有 (i) $a(b+c) = ab+ac$ $(b+c)a = ba+ca$; (ii) $a(b*c) = ab*ac$ $(b*c)a = ba*ca$; (iii) $a+(b*c) = (a+b)*(a+c)$ $(b*c)+a = (b+a)*(c+a)$; (iv) $a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$ $(b+c)*a = (b*a)+(c*a)$

从定义中可看出 $(S, +, \cdot), (S, *, \cdot), (S, +, *)$ 均为半环, 若 $(S, +, *, \cdot)$ 还满足以下条件: (V) $a*bc = (a*b)(a*c)$ $bc*a = (b*a)(c*a)$

(Vi) $a+bc = (a+b)(a+c)$ $bc+a = (b+a)(c+a)$ 则称双半环 $(S, +, *, \cdot)$ 是可分配双半环.

定义 2 双半环 $(S, +, *, \cdot)$ 称为幂等元双半环, 如果 S 还满足 $\forall a \in S$ 有 $a+a = a \cdot a = a * a = a$

例^[1] 设 $S = \{0, 1\}$, 在 S 上定义“+”, “*”运算如下: $\forall a, b \in S, a+b = \max\{a, b\}$

$a * b = \min\{a, b\}$, 则 S 关于以上运算和普通乘法构成幂等元双半环.

定义 3^[2,4] 幂等元半环 $(S, +, \cdot)$ 上的 Green D—关系是指 S 上的等价关系, 在 $(S, +)$ 上用 D^+ 表示, 在

收稿日期: 2005—11—22

作者简介: 张伟(1974—), 男, 江西吉安人, 在读硕士研究, 主要研究方向: 半环代数.

$(S, \cdot)$ 上用 $\dot{D}$ 表示, $(\forall a, b \in S) aDb \Leftrightarrow a + b + a = a \quad b + a + b = b \quad a\dot{D}b \Leftrightarrow aba = a \quad bac = b$.

3 幂等元双半环上的 Green D-关系

定义 设 $(S, +, *, \cdot)$ 是幂等元双半环, S 上的 Green D-关系定义如下: 半群 $(S, +)$ 和 $(S, \cdot)$ 上的 Green D-关系定义同幂等元半环 $(S, +, \cdot)$, 分别用 $\overset{+}{D}$ 和 $\dot{D}$ 表示, 半群 $(S, *)$ 上的 Green D-关系定义如下: $(\forall a, b \in S) aDb \Leftrightarrow a * b * a = a, b * a * b = b$

定理 1 若 $(S, +, *, \cdot)$ 是幂等元双半环, 则 S 上的 Green D-关系 $\overset{+}{D}, \overset{*}{D} \in \text{Con}(S)$, 若 S 为可分配双半环, 则 $\dot{D} \in \text{Con}(S)$. 且 $\overset{+}{D}\overset{*}{D}, \overset{*}{D}$ 和 $\dot{D}$ 分别是半群 $(S, \cdot), (S, +), (S, *)$ 上的最小半格同余. $[\text{Con}(S)]$ 表示 S 上所有同余的集合

证明 先证 $\overset{*}{D}$ 是 S 上的同余. 由定义可知自反性和对称性显然, 下证传递性, 若 $a\overset{*}{D}b, b\overset{*}{D}c$ 则 $a * b * c * a = a * b * c * b * a = a \Rightarrow a * b * c * a = a$, 同理可得 $a * c * b * a = a$

则 $a = a * a = a * c * b * a * a * b * c * a = a * c * b * c * a = a * c * a$ 同理: $c * a * c = c$ 所以 $a\dot{D}c$. 又 $(c + a) * (c + b) * (c + a) = [c + (a * b)] * (c + a) = c + a * b * a = c + a$

则 $(c + a)\overset{*}{D}(c + b)$, 同理 $(a + c)\overset{*}{D}(b + c), ca\dot{D}cb, ac\dot{D}bc$

从而 $\overset{*}{D}$ 是 $(S, \cdot), (S, +)$ 的同余.

下证 $\dot{D}$ 是半群 $(S, *)$ 上的同余.

$\forall c \in S$, 由 $a * b * a = a, b * a * b = b$ 可得:

$$\begin{aligned} (a * c) * (a * b * c) * (a * c) &= (a * c) * (a * b * c) * (a * b * a * c) \\ &= a * (c * a * b) * (c * a * b) * (a * c) = a * (c * a * b) * (a * c) = (a * c) * (a * b * a * c) \\ &= (a * c) * (a * c) = a * c \\ (a * b * c) * (a * c) * (a * b * c) &= (a * b) * (c * a) * (c * a) * (b * c) \\ &= (a * b) * (c * a)(b * c) = (a * b * c)(a * b * c) = a * b * c \end{aligned}$$

所以 $(a * c)\overset{*}{D}(a * b * c)$;

又 $(b * c) * (a * b * c) * (b * c) = (b * c) * (a * b * c) = (b * a * b * c)(a * b * c)$

$$= b * (a * b * c) * (a * b * c) = (b * a * b) * c = b * c$$

$$(a * b * c) * (b * c) * (a * b * c) = (a * b * c) * (a * b * c) = a * b * c$$

所以 $(a * c)\overset{*}{D}(b * c)$, 同理: $(c * a)\overset{*}{D}(c * b)$, 得证! 同理可得: $\overset{+}{D} \in \text{Con}(S)$. 若 S 是可分配的双半环且 $a\dot{D}b$, 则 $(c + a)(c + b)(c + a) = (c + ab)(c + a) = c + aba = c + a \Rightarrow (c + a)\dot{D}(c + b)$, 同理: $(a + c)\dot{D}(b + c), a * c\dot{D}b * c, c * a\dot{D}c * b$, 所以 $\dot{D}$ 是 S 上的同余, 同理可得: $\dot{D}$ 是 $(S, \cdot)$ 上的同余, 综上: $\dot{D} \in \text{Con}(s)$.

因为 $(x * y) * (y * x) * (x * y) = x * y * y * x * x * y = x * y * x * y = x * y$ 即 $x * y\dot{D}y * x$ 同理: $(x + y)\overset{+}{D}(y + x), xy\dot{D}yx$, 所以 $\overset{+}{D}, \overset{*}{D}$ 和 $\dot{D}$ 分别是相应半群上的最小半格同余.

设 ρ 是 $(S, +)$ 上的任一半格同余, 且 $a\dot{D}b$, 则 $a = (a + b + a)\rho(b + a + b) = b$

故 $\overset{+}{D} \subseteq \rho$, 即 $\overset{+}{D}$ 是 $(S, +)$ 上的最小半格同余.

同理可证: $\overset{*}{D}$ 和 $\dot{D}$ 分别是 $(S, *), (S, \cdot)$ 上的最小半格同余.

结论 易知① $\overset{+}{D} = \Delta$ (恒等关系) $\Leftrightarrow x + y = y + x, \overset{+}{D} = \nabla$ (泛关系) $\Leftrightarrow x + y + x = x$

② $\overset{*}{D} = \Delta \Leftrightarrow xy = yx, \overset{*}{D} = \nabla \Leftrightarrow xyx = x \quad (\forall x, y \in S)$

$$\textcircled{3} D^* = \triangle \Leftrightarrow x * y = y * x, D = \nabla \Leftrightarrow x * y * x = x \quad (\forall x, y \in S)$$

$$\textcircled{4} D \cap D \in \text{Con}(S)$$

引理 1 若 $(S, +, \cdot)$ 是幂等元半环, 则 $\forall a, b \in S$ $aD \cap D \dot{b} \Leftrightarrow (\exists u, v \in S)$ 有

$$a = (w + vu)(vu + w) \quad b = (vu + w)(w + vu)$$

证明(充分性) $a + b + a = (w + vu)(vu + w) + (vu + w)(w + vu) + (w + vu)(vu + w)$

$$= wu + w + vu + vw + vw + vu + w + wu + wu + w + vu + vw$$

$$= wu + w + vu + vw + vu + w + wu + w + vu + vw$$

$$= w(vu + w) + vu(vu + w) + (vu + w)(vu + w) + w(vu + w) + vu(vu + w)$$

$$= (w + vu + vu + w + w + vu)(vu + w) = (w + vu)(vu + w) = a$$

$$aba = (w + vu)(vu + vu)(vu + w)(w + vu)(w + vu)(vu + w)$$

$$= (w + vu)(vu + w) = a \quad \text{同理 } b + a + b = b \Rightarrow aDb, bab = b \Rightarrow aDb \Rightarrow aD \cap D \dot{b}$$

(必要性)若 $aD \cap D \dot{b}$ 成立. 取 $u = (ab + ba)(ba + ab), v = (ba + ab)(ab + ba)$, 则 $(w + vu)(vu + w) = [(ab + ba)(ba + ab)(ba + ab)(ab + ba) + (ba + ab)(ab + ba)(ab + ba)(ba + ab)] \cdot [(ba + ab)(ab + ba)(ab + ba)(ba + ab) + (ab + ba)(ba + ab)(ba + ab)(ab + ba)]$

令 $m = ab, n = ba$ 则有 $mnm = ab \cdot ba \cdot ab = ab \cdot ab = ab = m, mn = n$ 即 mDn .

又 $aDb, bDa \Rightarrow abDba \Rightarrow mDn \Rightarrow m + n + m = m, n + m + n = n$

$$(w + vu)(vu + w) = [(m + n)(n + m)(n + m)(m + n) + (n + m)(m + n)(m + n)(n + m)] + [(n + m)(m + n)(m + n)(n + m) + (m + n)(n + m)(n + m)(m + n)](m + n)(n + m)(n + m)(m + n) \\ = (mn + m + n + nm)(nm + n + m + mn) = (mn + nm)^2 (nm + mn)^2 = (mn + nm)(nm + mn) = m + mn + nm + n = (m + n)^2 = m + n \quad \text{同理可得 } (n + m)(m + n)(m + n)(n + m) = n + m$$

则 $(w + vu)(vu + w) = (m + n + n + m)(n + m + m + n) = (m + n + m)(n + m + n) = mn \Rightarrow ab \cdot ba = aba = a$ 同理可得 $(vu + w)(w + vu) = b$ 得证.

引理 2 若 $(S, +, \cdot)$ 是幂等元半环, 则 $D \cap D \in \text{Con}(S)$ 当且仅当 S 满足恒等式

$$[(xy + yx)(yx + xy) + z][[(yx + xy)(xy + yx) + z][[(xy + yx)(yx + xy) + z] = (xy + yx)(yx + xy) + z \quad (1)$$

$$[z + (xy + yx)(yx + xy)][z + (yx + xy)(xy + yx)][z + (xy + yx)(yx + xy)] = z + (xy + yx)(yx + xy) \quad (2)$$

证明 (充分性)如果 $D \cap D \in \text{Con}(S)$, 则 $\forall u, v, w \in S$, 由定理 2 可得

$$(w + vu)(vu + w)D \cap D \dot{(vu + w)}(w + vu)$$

$$\Rightarrow (w + vu)(vu + w) + wD \cap D \dot{(vu + w)}(w + vu) + w$$

$$\Rightarrow (w + vu)(vu + w) + wD \cap D \dot{(vu + w)}(w + vu) + w \quad \text{从而我们可得}$$

$$[(w + vu)(vu + w) + w][(vu + w)(w + vu) + w][(w + vu)(vu + w) + w] = (w + vu)(vu + w) + w$$

由 u, v, w 的任意性, (1)式得证. 同理可证得(2)式.

(必要性)如果 S 满足(1)式, $a, b, w \in S$, 且 $aD \cap D \dot{b}$, 由定理 2 $\exists u, v \in S$ 使得 $a = (w + vu)(vu + w)b = (vu + w)(w + vu)$ 由(1)式 $(a + w)(b + w)(a + w) = a + w$ 同理 $(b + w)(a + w)(b + w) = b + w \Rightarrow (a + w)D \cap D \dot{(b + w)}$ 又 $D \in \text{Con}(S)$ 且 aDb 从而 $a + wDb + w \Rightarrow (a + w)D \cap D \dot{(b + w)}$ 由(2)式同理可得 $(w + a)D \cap D \dot{(m + b)}$ 所以 $D \cap D \in \text{Con}(S)$, 证毕.

引理 3 若 $(S, +, *)$ 是幂等元半环, 则 $\forall a, b \in S$ $aD \cap D \dot{b} \Leftrightarrow (\exists u, v \in S)$ 有 $a = (u * v + v * u) * (v * u + u * v)$ $b = (v * u + u * v) * (u * v + v * u)$

引理 4 若 $(S, *, \cdot)$ 是幂等元半环, 则 $\forall a, b \in S$, $aD \cap D \dot{b} \Leftrightarrow (\exists u, v \in S)$ 有 $a = (w * vu)(vu * w)$

$$b = (vu * w)(w * vu)$$

注 采用引理 1 的证明方法同理可证得引理 3, 4.

引理 5 若 $(S, +, \cdot)$ 是幂等元半环, 则 $D \cap D \cap D \in \text{Con}(S)$ 当且仅当 S 满足恒等式

$$[(w * vu)(vu * w) * w][(vu * w)(w * vu) * w][(w * vu)(vu * w) * w] = (w * vu)(vu * w) * w \quad (1)$$

$$[w * (vu * w)(w * vu)][w * (w * vu)(vu * w)][w * (vu * w)(w * vu)] = w * (vu * w)(w * vu) \quad (2)$$

证明 (方法同引理 2)

定理 2 若 $(S, +, *, \cdot)$ 是幂等元双半环, 则 $\forall a, b \in S, aD \cap D \cap D \in \text{Con}(S) \Leftrightarrow (\exists u, v \in S)$ 有

$$a = (w + vu)(vu + w) \quad b = (vu + w)(w + vu) \quad (1)$$

$$a = (w * vu)(vu * w) \quad b = (vu * w)(w * vu) \quad (2)$$

三式中任意两式成立.

证明 由引理 1, 3, 4 直接可得.

定理 3 若 $(S, +, *, \cdot)$ 是幂等元双半环, 则在 S 上 $D \cap D \cap D = \Delta$ 当且仅当 S 满足恒等式

$$(w + vu)(vu + w) = (vu + w)(w + vu)$$

$$(w * vu)(vu * w) = (vu * w)(w * vu)$$

$$(u * v + v * u) * (v * u + u * v) = (v * u + u * v) * (u * v + v * u)$$

证明 由引理 1, 引理 3, 引理 4 直接可得.

定理 4 若 $(S, +, *, \cdot)$ 是幂等元双半环, 则在 S 上 $D \cap D \cap D = \nabla \Leftrightarrow (\forall x, y \in S)$ 有

$$x + y + x = x, xyx = x, x * y * x = x$$

定理 5 若 $(S, +, *, \cdot)$ 是幂等元双半环, 则下列命题等价: ① $D \cap D \cap D \in \text{Con}(S)$

② S 满足 $[(xy + yx)(yx + xy) + z][(yx + xy)(xy + yx) + z][(xy + yx)(yx + xy) + z]$

$$= (xy + yx)(yx + xy) + z \quad (1)$$

$$[z + (xy + yx)(yx + xy)][z + (yx + xy)(xy + yx)][z + (xy + yx)(yx + xy)] = z + (xy + yx)(yx + xy) \quad (2)$$

③ S 满足 $[(w * vu)(vu * w) * w][(vu * w)(w * vu) * w][(w * vu)(vu * w) * w]$

$$= (w * vu)(vu * w) * w \quad (3)$$

$$[w * (vu * w)(w * vu)][w * (w * vu)(vu * w)][w * (vu * w)(w * vu)] = w * (vu * w)(w * vu) \quad (4)$$

证明 ① $\Rightarrow$ ② 若 $D \cap D \cap D \in \text{Con}(S)$, 由定理 2 则 $\forall a, b, w \in S, aD \cap D \cap D \in \text{Con}(S) \Rightarrow (\exists u, v \in S) a = (w +$

$$vu)(vu + w) \quad b = (vu + w)(w + vu) \Rightarrow (w + vu)(vu + w)D \cap D \cap D(vu + w)(w + vu) \Rightarrow$$

$$(w + vu)(vu + w) + wD \cap D \cap D(vu + w)(w + vu) + w \Rightarrow$$

$$(w + vu)(vu + w) + wD(vu + w)(w + vu) + w \Rightarrow$$

$$[(w + vu)(vu + w) + w][(vu + w)(w + vu) + w][(w + vu)(vu + w) + w] = (w + vu)(vu + w) + w$$

即②成立.

② $\Rightarrow$ ① 若 S 满足 (1), (2) 式, $a, b, w \in S$, 且 $aD \cap D \cap D \in \text{Con}(S) \Rightarrow aD \cap D \cap D \in \text{Con}(S)$, 又

$D \in \text{Con}(S)$, 所以 $D \cap D \cap D \in \text{Con}(S) \Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ② 同理可证得 ① $\Rightarrow$ ③, 即 ① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ③

参考文献:

[1] 谢道云. 幂等元双半环. 兰州大学学报(自然科学版), 1995, 31(4): 16~21.

[2] X-Z. Zhao, Y-Q. Guo and K-P. Shum, D- $\cap$ subvarieties of the Variety of Idempotent Semirings[J]. Algebra Colloquium 9, 1(2002) 15-

[3] F·PASTIJN, X·Z·ZHAO, Green 's D-Relation for the Multiplicative Reduct of an Idempotent Semiring[J]. Archivum Mathematicum·(BRNO) Tomus 36(2000) 77—93

[4] M·K·SEN, Y·Q·Guo, and K·P·Shum· A Class of Idempotent Semirings[J]. Semigroup Forum 2000, (60):351~367.

[5] 苗西红·关于幂等元半环上的 $\text{Green}^+\text{---D}\cap\dot{\text{D}}$ 关系[J]. 杨凌职业技术学院学报, 2004, (3)2.

The Green 's D-Relations for the Idempotent Bi-Semiring

ZHANG Wei, ZUO Li-ming, WANG Song-sheng

(Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: In this paper, through the discussion of the $\text{Green}^+\text{---D}$ relations of three idempotent semirings on the idempotent bi-semiring, the $\text{Green}^+\text{---D}$ relations of the idempotent bi-semiring are studied. The necessary and sufficient conditions of $\text{Green}^+\text{---D}\cap\dot{\text{D}}$ relation satisfied by the elements of idempotent bi-semirings are given. The $\text{Green}^+\text{---D}\cap\dot{\text{D}}$ relation is characterized and it is congruence on the idempotent bi-semirings.

Key words: idempotent bi-semiring; idempotent semiring; $\text{Green}^+\text{---D}$ relation; congruence