第 23 卷第 4 期
2006 年 8 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.23 No.4
Aug., 2006

文章编号:1005－0523(2006)04－0127－03

哈密顿线图中 2－因子的分支数

刘瑞富,刘展鸿,王华平

(江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330027)

摘要:设 G 为一简单图,本文证明了:如果 G 的线图 $L(G)$ 为哈密顿的,且在 G 中存在两个顶点 u、$v\in V(G)$,满足 $d(u)+d(v)\geq f(n)$($f(n)$ 为整数),那么 $L(G)$ 中存在 k 个分支的 2－因子,其中 $1\leq k\leq\lfloor\frac{f(n)-2}{4}\rfloor$,且说明了当 $f(n)\leq n$ 时所给的结果为最好可能的,这个结果是对 R.J. Gould 和 E.A. Hynds[4]的结果的推广和加强.

关 键 词:线图;2－因子;哈密顿

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

1 介绍

本文考虑的是有限无向简单图,即不含重边和环的有限无向图,顶点集为 $V(G)$,边集为 $E(G)$.如果没有特别说明,本文中的术语和符号参阅文献[1],图 G 的线图 L(G)即是以 G 的边集 E(G)为顶点集,两顶点相邻当且仅当它们在 G 中为两条相邻接的边,$H\subseteq G$ 时,G 中的顶点 v 在 H 中的度记为 $d_H(v)$,G 的 2－因子即 G 的生成子图 H,使得对 G 中的任一顶点 $v\in V(G)$,都有 $d_H(v)=2$.一个 2－因子的分支数也就是看这个 2－因子是由多少个顶点不相交的圈组成的.特别地,对一个图的哈密顿圈而言,它就是具有 1 个分支的 2－因子.

图 G 的环路为 G 中顶点和边的交替序列 C:$v_1,e_1,v_2,e_2\cdots\cdots,v_m,e_m,v_1$,使得 $e_i=v_iv_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,m-1$.$e_m=v_mv_1$ 且如果 $i\neq j$ 则 $e_i\neq e_j$.环路 C 中如果 m 个顶点均不相同则为一个圈,而且任何一个环路都可以分解成一个或多个圈的边不交并.

我们定义 G 的控制环路为 G 的具有这种性质的环路:对 G 的任何一条边,它或者为环路上的边,或者与环路中某一条边相邻接.

一个星就是一个完全二分图 $K_{1,m}$($m\geq3$),其中度为 m 的顶点叫做这个星的中心,度为 1 的顶点为星的叶子.

Harrary 和 Williams 给出了 $L(G)$ 为哈密顿时原图 G 的特征:

定理 1[2] 设 G 为没有孤立顶点的图,则 G 的线图 $L(G)$ 为哈密顿的,当且仅当 G;$K_{1,n}$(对某一 $n\geq3$),或者 G 中存在一个控制环路.

给定一个图 G,如果 G 中存在 k 个边不相交的环路和星的集合,使得 G 中的每一边要么为某一环路或星的边,要么与某个环路中的某一条边相邻接,我们就说中存在 k－控制系统(k－系统),其中与某个环路中的某一条边相邻接的边叫控制边.

以往对 2－因子的研究,通常是考虑它的存在性,简单地便是看图中是否含一个哈密顿圈,然而最近在 2－因子的研究中则更多地关注 2－因子的结构的研究(如 2－因子的分支数的多少).Gould 和 Hynds 在研究 $L(G)$ 中有 k 个分支的 2－因子时总结出了中有 k 个分支的 2－因子时原图的结构.

定理 2[3] 设 G 为没有孤立顶点的图,$L(G)$中

收稿日期:2006－02－28

基金项目:江西省自然科学基金资助项目(0312011)

作者简介:刘瑞富(1983－),男,江西省南昌市,硕士研究生,研究方向:图论.

存在 $k(k\geq 1)$ 个分支的 2－因子，当且仅当 G 中存在 k－控制系统.

下面的定理是线图的哈密顿性的原图 G 的度和条件.

定理 3[5] 设 G 为一个顶点数 $n\geq 4$ 且至少有一条边的图，假设对每条边 $xy\in E(G)$，都有 $d(x)+d(y)\geq n$，则 $L(G)$ 为哈密顿的.

Gould 和 Hynds 把定理 3 加强为：

定理 4[4] 设 G 为一个顶点数 $n\geq 4$ 且至少有一条边的图，假设对每条边 $xy\in E(G)$，都有 $d(x)+d(y)\geq n$，则 $L(G)$ 中存在 k 个分支的 2－因子. $\left(1\leq k\leq \left\lfloor \frac{n-2}{4}\right\rfloor\right)$

由定理 3 知道：定理 4 中的条件保证了 $L(G)$ 为哈密顿的. 如果我们对哈密顿线图考虑它的 2－因子的分支数. 这样我们可以得到比定理 4 更一般的结果(见定理 5). 其中 $f(n)$ 为整数且 $f(n)\geq 6$.

定理 5 设图 G 中没有孤立顶点且 $L(G)$ 为哈密顿的，如果 G 中存在两个顶点 u、$v\in V(G)$、，使得 $d(u)+d(v)\geq f(n)$，则 $L(G)$ 中存在 k 个分支的 2－因子. $\left(\left(1\leq k\leq \left\lfloor \frac{f(n)-2}{4}\right\rfloor\right)\right)$

2 定理 5 的证明

我们可以用类似于定理 4 的方法来证明定理 5

证 对 k 进行归纳证明，因为 $L(G)$ 为哈密顿的，所以 $k=1$ 时定理成立，假设 $L(G)$ 中存在 $k-1$ 个分支的 2－因子 $\left(1\leq k\leq \left\lfloor \frac{f(n)-2}{4}\right\rfloor\right)$，要完成定理的证明只需证得 $L(G)$ 中有 k 个分支的 2－因子即可.

反证 假设 $L(G)$ 中不存在 k 个分支的 2－因子，又因为 $L(G)$ 中存在 $k-1$ 个分支的 2－因子，根据定理 2，所以 G 中存在一个 $(k-1)$－控制系统，而不存在 k－控制系统，我们考虑 $(k-1)$－控制系统，设该系统中有 i 个星，从而有 $k-1-i$ 个环路.

断言 1 系统中每个星最多有 5 条边

证 假设有一个星有 6 条或更多的边，则我们可以重新分配这个星中的边，得到两个至少有 3 条边的星，这样，原来的 $(k-1)$－控制系统变成了 k－控制系统，这与假设矛盾.

断言 2 控制系统中的环路一定是圈

证 假设控制系统中有一个环路不是圈，因为环路可以分解为多个圈的边不交并，所以我们可以把这个环路分解成 2 个边不交的环路，使得其中每个环路至少为一个圈或多个圈的边不交并，从而图中的控制系统数增加了 1，得到了一个 k－控制系统，这与假设矛盾.

现在考虑图 G 中的某一个顶点 $\omega\in V(G)$，如果 ω 为控制系统中某个星的中心，那么这个星对 ω 至少贡献了 3 度，而假如这个星有 4(或 5)边，则我们可以选择其中的 1(或 2)条，称它们为可移的边，因为如果 ω 出现在控制系统中的其他位置时，如另一个星的中心或圈上，我们可以把这些可移边移到的这些位置而可以不改变图 G 中的控制系统的结构(i 个星、$k-1-i$ 个圈). 如果 ω 与图 G 中的某条控制边相关联，我们也称该控制边为可移边.

断言 3 $(k-1)$－控制系统中的某一个顶点 $\omega\in V(G)$，则最多有 2 条可移边与它相关联

证 假设 ω 与 3 条或更多的可移边相关联，则我们可以用这些可移边形成一个以 ω 为中心的星，因为删除可移边并不影响控制系统的结构，这样原来的 $(k-1)$－控制系统再加上以 ω 为中心的星，便形成了一个 k－控制系统，这与假设矛盾.

我们利用以上 3 个断言来确定 $d(u)$、$d(v)$ 的上界

设以 u 为中心的星的个数为 l，以 v 为中心的星的个数为 m，则有 $i-l-m$ 个星既不以 u 为中心也不以 v 为中心.

情形 1 $uv\in E(G)$

先看 u 的最大可能的度为多少，除掉与 u 关联的可移边，每个以 u 为中心的的星贡献 3 度，因为 $uv\in E(G)$，所以 v 以为中心的星最多贡献 1 度，此外不以 u、v 为中心的星每个最多贡献 1 度，每个圈最多贡献 2 度，与 u 关联的边最多有 2 条，最多贡献 2 度，所以有：

$$d(u)\leq 3l+1+(i-m-l)+2(k-1-i)+2$$

同理 $d(v)\leq 3m+1+(i-m-l)+2(k-1-i)+2$

因为边 uv 不能同时在以 u 为中心的星和以 v 为中心的星上，所以在做上面两式的度和时，右边的式子中应该减掉 1，这样就有：

$$\begin{aligned}d(u)+d(v)&\leq 3l+3m+1+2(i-m-l)+4(k-1-i)+4\\&=l+m-2i+4k+1\\&\leq i-2i+4k+1\\&\leq 4k+1\end{aligned}$$

又因为定理的条件中有 $d(u)+d(v)\geq f(n)$，

所以 $f(n)\leq 4k+1$

即 $k\geq\lfloor\frac{f(n)-1}{4}\rfloor$ 这与 $k\leq\lfloor\frac{f(n)-2}{4}\rfloor$ 矛盾

情形 2　$uv\notin E(G)$

这与 i)的情况相同，只是以 u 为中心的星对 v 不贡献度的同时以 v 为中心的星对 u 也不贡献度，这样上式就变为：

$d(u)\leq 3l+(i-m-l)+2(k-1-i)+2$

$d(v)\leq 3m+(i-m-l)+2(k-1-i)+2$

得　$d(u)+d(v)\leq 4k<4k+1$

同情形 1 矛盾．

3　注记

本小节主要说明文章中的结果在 $f(n)\leq n$ 时是最好可能的，设 $V(G')=\{u, u_1, \ldots, u_k, v, v_1, \ldots, v_k\}$．

$E(G')=\{uv, uu_i, uu_k, vv_k, u_iv_i, vv_i, u_k\omega_j, \omega_j\omega_{j+1}, \omega_t v_k \quad i=1,\ldots,k-1, j=1,\ldots,t-1\}$ $t\geq 0$.

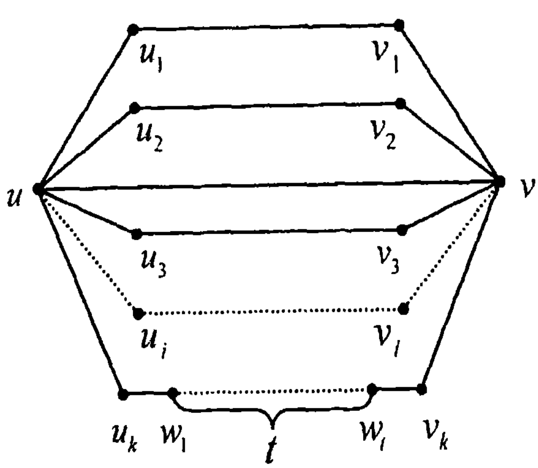

图 1　G′

记上图 G' 中的顶点数为 n，如上图则有：$n=2k+2+t$ 如果设 $n-t-2=0(\mathrm{mod}4)$，由定理 1，图 G' 的线图 $L(G')$ 为哈密顿的，且

$$d(u)+d(v)=f(n)=2k+2=n-t$$

我们来看 G' 中控制系统的结构，如果控制系统中有星存在，由于只有 $d(u)\geq 3$，$d(v)\geq 3$，则只能是以 u 或 v 为中心的星，这时与星的叶子相关联的边(即两端点度均为 2 的边如：e、f)将得不到控制，所以控制系统全部由环路组成，而当每个环路均为圈时，环路的数目最大，此时图中所包含的控制系统数最大，从图 G' 中很容易看到，它有且最多有 $\frac{n-t-2}{4}$ 个边不交的圈，边 uv 为控制边，所以 G' 中有 k－控制系统，其中 $1\leq k\leq\frac{n-t-2}{4}$，由定理 2，$L(G')$ 中存在相应 k 个分支的 2－因子，这说明定理 5 中的结果在 $f(n)\leq n$ 时为最好可能的．

参考文献：

[1] J．A Bondy and U．S．R Murty "Graph Theory with Applications" MacMillan，London and Elsevier Amsterdam，1976

[2] F． Harrary and C．st．J．A Nash-Williams，"On eulerian and Hamiltonian graphs and line graphs"，Canadian Mathematical Bulletin PP．701-710 1965

[3] R．J Gould，E．A Hynds，"A Note on Cycles in 2-factors of line Graphs"，Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications． Vol 26 PP 46-48 ，1999

[4] R．J Gould，E．A Hynds "A Note on 2-factors in Line Graphs" Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications． Accapted for published

[5] R．Brualdi，R．Shanny，"Hamiltonian Line Graphs" Journal of Graph Theory． Vol．5，PP 307-314 ，1981

[6] S． Brandt，G．Chen，R．J Faudree，R．J Gould，L． Lesniak "On the Number of Cycles in a 2-factor"，Journal of Graph Theory，Vol．24，No．2，PP．165-173，1997 The components of 2-factors in Hamiltonian Line Graphs

The Components of 2－factors in Hamiltonian Line Graphs

LIU Rui-fu，LIU Zhan-hong，WANG Hua-ping

(Institute of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang 330027，China)

Abstract：Let be a simple graph，In this paper the author showed that：If $L(G)$ which is the Line Graph of G is Hamiltonian and there exist two vertices $u, v\in V(G)$ in G，such that $d(u)+d(v)\geq f(n)$ ($f(n)$ is a positive integer)，then $L(G)$ has a 2-factor with k components ($1\leq k\leq\frac{f(n)-2}{4}$) and this result is best possible when $f(n)\leq n$．This result is an extension and strength of R．J．Gould and E．A ．Hynds[4]'s result．

Key words：line graph；2-factors；hamilton