文章编号:1005－0523(2006)04－0130－02

关于正则图的最大特征值的一个不等式

曲　慧[1],冯立华[2]

(1.山东工商 学院数学院,山东 烟台 264005;2.上海交通大学 数学系,上海 200030)

摘要:主要讨论了Krivelevich的与图的谱有关的一个不等式的等号成立的情况,得到下面的结果:

定理1:设 $G=(V,E)$是 n 个顶点的 d 正则图,令 $d=\lambda_1\geq\lambda_2\geq\Lambda\geq\lambda_n$ 是 G 的所有特征值.又令 $\lambda=\max_{2\leq i\leq n}|\lambda_i|$,则对于 $U,W\subset V$,有 $|e(U,W)-d|U\|W|/n|\leq\lambda\sqrt{|U\|W|\left(1-|U|/n\right)\left(1-|W|/n\right)}$,其中 $e(U,W)$表示 U 到 W 的边数;等号成立当且仅当 $U=W$,且 $G|e(U,W)-d|U||W|/n|$或者为具有参数(n,k,a,a)的强正则图,或者为完全图.

关　键　词:正则图;谱;谱不等式

中图分类号:O157.5　　　　　**文献标识码**:A

设 $G=(V,E)$是一个图,其顶点集为 $V=\{1,2,\Lambda,n\}$,G 的邻接矩阵A 是一个 $n\times n$ 矩阵,其元素为 $a_{ij}=1$,如果 $ij\in E$;0,其他情况.显然 A 是一个(0,1)实对称矩阵,且其主对角线上的元素全为0.设 A 的特征值为$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\Lambda\geq\lambda_n$,其特征向量对应的一组标准正交基为 $B=\{x_1,x_2,\Lambda,x_n\}$:$Ax_i=\lambda_i x_i$,$x_i^t x_i=1$,$1\leq i\leq n$.利用谱分解,$A$ 可以写成 $A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i x_i^t$[5].

设 G 是n 个顶点的正则图,且它不是完全图也不是空图.我们称 G 是具有参数(n,k,a,c)的强正则图(见[3]),如果G是k正则的,且G中任意两个相邻的顶点都有a个公共邻点,而任意两个不相邻的顶点都有 c 个公共邻点.对于图论中的其他概念,参见[2].

引理1[3]　若一个连通正则图 G 恰好有3个不同的特征值,则 G 是强正则图.

引理2[3]　设 G 是具有参数(n,k,a,c)的强正则图,则除 k 外,G 有另外两个特征值 $\theta=\frac{1}{2}(a-c+\sqrt{D})$,$\tau=\frac{1}{2}(a-c-\sqrt{D})$,这里 $D=(a-c)^2+4(k-c)$.

其重数为

$$m_\theta=\frac{1}{2}(n-1-(2k+(n-1)(a-c))/\sqrt{D},$$

$$m_\tau=\frac{1}{2}(n-1+(2k+(n-1)(a-c))/\sqrt{D}.$$

设 $G=(V,E)$是 d 正则图,则 $d=\lambda_1>\lambda_2$.本文中,我们将讨论下面著名的不等式(见[1],Chapter 9或[4])的等号成立时的情况.

定理1　设 $G=(V,E)$是 n 个顶点的 d 正则图,令 $d=\lambda_1\geq\lambda_2\geq\Lambda\geq\lambda_n$ 是 G 的所有特征值.又令 $\lambda=\max_{2\leq i\leq n\leq}|\lambda_i|$,则对于 $U,W\subset V$ 有

$$|e(U,W)-d|U\|W|/n|\leq\lambda\sqrt{|U\|W|\left(1-|U|/n\right)\left(1-|W|/n\right)}\tag{1}$$

其中 $e(U,W)$表示 U 到W 的边数;等号成立当且仅当 $U=W$,且 G 或者为具有参数(n,k,a,a)的强正则图,或者为完全图.

证明　令 $B=\{x_1,x_2,\Lambda,x_n\}$为 A 的特征向量组成的一组标准正交基.则由前面的说明有 $Ax_i=\lambda_i x_i$,$x_i^t x_i=1$,$1\leq i\leq n$,$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i x_i^t$.

令 $A_1=\lambda_1 x_1 x_1^t$,$\mathscr{R}=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i x_i x_i^t$,则 $A=A_1+\mathscr{R}$

令 $u=|U|$,$\omega=|W|$.U 的示性向量为 $\chi_U\in R^n$,即,若 $i\in U$,则 $\chi_U=1$;其他情况为0.同样定义 W 的示性向量为 χ_W.利用基 $B=\{x_1,x_2,\Lambda,x_n\}$,我们有

$$\chi_U=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\ \alpha_i=\chi_U^t x_i,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\|\chi_U\|^2=u\tag{2}$$

$$\chi_W=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i,\ \beta_i=\chi_W^t x_i,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i^2=\|\chi_W\|^2=\omega\tag{3}$$

收稿日期:2006－01－16

作者简介:曲　慧(1978－),女,山东威海人,在读硕士,研究方向:组合数学.

注意到 $e(U,W)=\chi_U^t A\chi_W=\chi_U^t A_1\chi_W+\chi_U^t R\chi_\omega$.　　(3)

下面对上式中的和进行估计.其中第一项是主项,第二项是误差项

$$\chi_U^t A_1\chi_W=\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^t(\lambda_1 x_1 x_1^t)\left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right)=\alpha_1\beta_1\lambda_1 \quad (4)$$

$$\chi_U^t \mathscr{R}\chi_W=\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^t\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i x_i^t\right)\left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right)=\sum_{i=2}^n \alpha_i\beta_i\lambda_i \quad (5)$$

注意到 G 是 k 正则的,有 $d=\lambda_1$,且 $x_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\Lambda,1)^t$,我们有 $\alpha_1=\chi_U^t x_1=\frac{u}{\sqrt{n}}$,$\beta_1=\chi_W^t x_1=\frac{\omega}{\sqrt{n}}$,因此 $\chi_U^t A_1\chi_W=\frac{duw}{n}$.

下面估计(5)式,由柯西不等式,得

$$|\chi_U^t\mathscr{R}\chi_W|=\left|\sum_{i=2}^n\alpha_i\beta_i\lambda_i\right|\le\lambda\left|\sum_{i=2}^n\alpha_i\beta_i\right|\le\lambda\sqrt{\sum_{i=2}^n\alpha_i^2\sum_{i=2}^n\beta_i^2}=\lambda\sqrt{(\|\chi_U\|^2-\alpha_1^2)(\|\chi_W\|^2-\beta_1^2)}$$

$$=\lambda\sqrt{uw\left(1-\frac{u}{n}\right)\left(1-\frac{w}{n}\right)} \quad (6).$$

若定理中等号成立,则证明过程中的不等号全为等号,由(6)式得

$$\left|\sum_{i=2}^n\alpha_i\beta_{i\lambda_i}\right|=\left|\lambda\sum_{i=2}^n\alpha_i\beta_i\right|=\lambda\sqrt{\sum_{i=2}^n\alpha_i^2\sum_{i=2}^n\beta_i^2} \quad (7)$$

其中第二个等号说明$\frac{\alpha_i}{\beta_i}=\gamma$为常数,$2\le i\le n$.又

$$\sum_{i=2}^n\alpha_i^2=u-\alpha_1^2=u-\frac{u^2}{n},\ \sum_{i=2}^n\beta_i^2=w-\beta_1^2=w-\frac{w^2}{n} \quad (8)$$

由(8)式,得　$\gamma=\sqrt{\frac{u(n-u)}{w(n-w)}}$.

又由(2)式和(3)式,得

$$\chi_U-\alpha_1 x_1=\sum_{i=2}^n\alpha_i x_i=\chi_U-\frac{u}{n}\bar{1},$$

$\chi_W-\beta_1 x_1=\sum_{i=2}^n\beta_i x_i=\chi_W-\frac{w}{n}\bar{1}$,这里$\bar{1}$是全1向量.

因此,我们得到 $\chi_U-\frac{u}{n}\bar{1}=\sqrt{\frac{u(n-u)}{w(n-w)}}\left(\chi_w-\frac{w}{n}\bar{1}\right)$

我们断言,要使等号成立,一定有 $u=w$ 且 $U=W$.

否则一定存在 $v\in U$,但 $v\notin W$,则有 $\chi_U(v)=1$,$\chi_W(v)=0$,看上式的第 v 个分量,有 $1-\frac{u}{n}=\sqrt{\frac{u(n-u)}{w(n-w)}}\left(0-\frac{w}{n}\right)$,这是不可能的.因此我们得到结论.

(7)式中第一个等号说明$|\lambda_i|=\lambda$,$2\le i\le n$.由 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=0$ 可知,$\lambda\ne0$

若 $\lambda_i<0$,$2\le i\le n$,,则 G 只有两个不同的特征值,因此 G 一定是完全图.

若 G 不是完全图也不是空图,且 $\lambda_2>0$,则 G 有三个不同的特征值.已知 G 正则,由引理1,得 G 一定为强正则图.设 G 的三个不同的特征值为 k,$\theta>0$,$\tau<0$,且有$|\theta|=|\tau|$.由引理2知,$\theta\cdot\tau=-(k-c)$.因此有

$\theta=\sqrt{k-c}$,$\tau=-\sqrt{k-c}$.

再由引理2得 $a=c$.因此此时 G 为具有参数(n,k,a,a)的强正则图,且 $\theta>0$,$\tau<0$ 的重数为

$$m_\theta=\frac{1}{2}\left(n-1-\frac{k}{\sqrt{k-a}}\right),$$

$$m_\tau=\frac{1}{2}\left(n-1+\frac{k}{\sqrt{k-a}}\right).$$

反之,当图 G 为强正则图时,可以验证,等号成立.证明完毕.

参考文献:

[1] N. Alon, J. Spencer, The probabilistic method[M]. 2nd Ed. Wiley, New York, 2000.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph theory with applications[M]. Macmillan Press, NewYork, 1976.

[3] C. D. Godsil, G. Royle, Algebraic graph theory[M]. Spinger Verlag, NewYork, 2001.

[4] M. Krivelevich, B. Sudakov, Pseudo-random graphs[J]. preprint.

The Equality Condition of Two Inequalities on Graph Spectra

QU Hui[1], FENG Li-hua

(1. Shandong Institute of Business and Technology, Yaitai 264005; 2. Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: In this paper, we mainly discuss the equality condition of two inequalities obtained by Krivelevich, we get the following result: Let G be a d-regular graph on n vertices. Let $d=\lambda_1\ge\lambda_2\ge\Lambda\ \Lambda\ge\lambda_n$ be the eigenvalues of G. denote $\lambda=\max_{2\le i\le n}|\lambda_i|$. Then for every two subsets $U, W\subset V$, $|e(U,W)-d|U\|W|/n|\le\lambda\sqrt{|U\|W|(1-|U|/n)(1-|W|/n)}$.

Key words: regular graphs; spectra; spectra inequalty.