文章编号:1005-0523(2006)04-0132-03

关于前缀码的一点注记*

陈　辉[1],刘二根[2],郭小江[1]

(1.江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330046;2.华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:主要目的是研究前缀码,得到了前缀码与极大前缀码的若干特征.从而推广了Shyr的关于前缀码的结果

关　键　词:自由幺半群;语言;前缀码;极大前缀码

中图分类号:O152.7　　**文献标识码**:A

1　引言

设 X 为字母表,X^+(X^*)记由 X 生成的自由(幺)半群.X^+ 的任意子集称为语言.令 A 为语言.若 A 满足 $A\cap AX^+=\emptyset$,则称 A 为前缀码.进一步,前缀码 A 称为一极大前缀码,如果对 X^+ 任意中的字 $y\notin A$,都有 $A\cup\{y\}$ 并不是前缀码.

定义 1　设 A,B 为 X 上的非空语言.

(1) $A'=\{x\in X^+:(u\in X^*)xu\in A\}$,称为 A 的前缀集;

(2) $A^c=\{x\in X^*\ \forall(\exists\ u\in X^+)xu\in A\}$,称为 A 的严格前缀集.

(3) $A^{-1}B=\{x\in X^*\mid Ax\cap B\neq\emptyset\}$.

显然,对 X 上的非空语言 A 和 B,有

$1\in A^c$,$(A\cup B)'=A'\cup B'$,$(A\cup B)^c=A^c\cup B^c$

成立.特别地,若 $1\notin A$,则 $A\subseteq A'$;若 A 是前缀码,则 $A'\setminus A^c=A$.

2　主要结果

命题 1　若 A 为 X 上的非空语言,则下列条件等价:

(1) A 是前缀码;

(2) $A\cap A^c=\emptyset$;

(3) $A'\cap AX^+=\emptyset$;

(4) 对任意 $y\in A^c$,$B=\{y\}^{-1}(A\cap yX^+)$,为前缀码.

证明:(1)⇒(2)若 $a\in A\cap A^c$,则存在 $a_1\in A$,$u\in X^+$使得 $a_1=au$,与 A 为前缀码矛盾.于是 $A\cap A^c=\emptyset$.

(2)⇒(3)设 $a\in A'\cap AX^+$,那么存在 $x\in X^+$,$y\in X^*$,$a_1\in A$,$a_2\in A$ 使得 $a_1=ay$,$a=a_2x$.于是,$a_1=a_2xy$.这说明,$a_2\in A\cap A^c$,与 $A\cap A^c=\emptyset$ 矛盾.从而 $A'\cap AX^+=\emptyset$.

(3)⇒(1)　由于 $A\subseteq A'$,则 $A\cap AX^+\subseteq A'\cap AX^+=\emptyset$.于是 A 是前缀码.

(1)⇒(4)　设 B 不是前缀码.则存在 b_1,$b_2\in B$,$x\in X^+$,使得 $b_2=b_1x$,但由于 yb_1,$yb_2\in A$,我们有 $yb_2=yb_1x$,这与 $A\cap AX^+=\emptyset$,故 B 是前缀码.

(4)⇒(1)　设(4)成立.取 $y=1\in A^c$,则 $B=\{y\}^{-1}(A\cap yX^+)=A$ 为前缀码.

下面给出极大前缀码的一些刻画:

命题 2　令 A 为 X 上的非空语言,则下列条件等价:

(1) A 为 X 上的极大前缀码;

(2) 对任意 $y\in A^c$,$B=\{y\}^{-1}(A\cap yX^+)$为极

收稿日期:2006-03-06

作者简介:陈辉(1983-),男,安徽淮南人,江西师范大学硕士研究生,主要从事半群代数理论研究.

大前缀码；

(3) $X^+ = A' \dot{\cup} AX^+$(表示两者无交并)．

证明　(1)⇒(2) 由命题 1，$B = \{y\}^{-1}(A \cap yX^+)$为 X 上的前缀码．下面证明 B 为极大前缀码．若 $b \in X^+ \setminus B$，则有 $yb \notin A$，又 A 为极大前缀码，即有 $yb \in A^c$ 或 $yb \in AX^+$．我们分两种情况：

i) ．$yb \in A^c$ 则存在 $a \in A$，$x \in X^+$使得 $ybx = a$．若 $ybx = a$，则 $bx \in B$．显然，$B \cup \{b\}$不是前缀码．

ii) $yb \in AX^+$．则存在 $a \in A$，$x \in X^+$使得 $yb = ax$．从而存在 $u \in X^+$使得 $y = au$，$ub = x$ 或 $a = yu$，$b = ux$．若 $y = au$，$ub = x$，由 $y \in A^c$，存在 $a_1 \in A$，$x_0 \in X^+$使得 $a_1 = yx_0$，即 $a_1 = yx_0 = aux_0$，与 A 为前缀码矛盾，从而 $a = yu$，$b = ux$．这样，$u \in B$．显然，$B \cup \{b\}$不是前缀码．

至此，证明了 B 为极大前缀码．

(2)⇒(1)取 $y = 1 \in A^c$，则 $B = \{y\}^{-1}(A \cap yX^+) = A$ 为极大前缀码．

(1)⇒(3)注意到，A 为 X 上的前缀码．由命题 1，知 $A' \cap AX^+ = \emptyset$．若 $y \in X^+ \setminus A'$，则 $y \notin A$．由 A 的极大性，知 $A \cup \{y\}$不是前缀码，因而存在 $a \in A$，$x \in X^+$使得 $y = ax$ 或 $a = yx$．但 $y \notin A'$，我们有 $y = ax \in AX^+$．故 $X^+ = A' \dot{\cup} AX^+$．

(3)⇒(1)由 $A' \cap AX^+ = \emptyset$ 和命题 1，知 A 为前缀码．由假设 $X^+ = A' \dot{\cup} AX^+$，知，若 $y \notin A$，则 $y \in AX^+$或 $y \in A^c$．这样，$A \cup \{y\}$不可能为前缀码．从而 A 为 X 上的极大前缀码．

由命题 2，我们有下面推论．

推论 1　如果 M，M_0 为 X 上的极大前缀码，那么

(1)若 $y \in M$，则 $M_1 = (M \setminus \{y\}) \cup yM_0$ 为极大前缀码；

(2)若 $yM_0 \subseteq M$，则 $M_2 = (M \setminus yM_0) \cup \{y\}$为极大前缀码．

证明　显然，$(yM_0)' = \{y\}' \cup yM_0'$，$y \in \{y\}' \subseteq (yM_0)'$，$yM_0' \subseteq (yM_0)'$．因为 M_0 为极大前缀码，得到 $X^+ = M_0' \cup M_0X^+$，因而 $yX^+ = yM_0' \cup yM_0X^+$．

(1) 令 $y \in M$，则$\{y\}' \in M'$，从而 $M_1' = (M \setminus \{y\})' \cup (yM_0)' = M' \cup yM_0'$．由于 $M_1X^+ = (M \setminus \{y\})X^+ \cup yM_0X^+ = (MX^+ \setminus yX^+) \cup yM_0X^+ = MX^+ \setminus yM_0'$．

这样 $X^+ = M' \dot{\cup} MX^+ = (M' \cup yM_0') \dot{\cup} (MX^+ \setminus yM_0') = M_1' \dot{\cup} M_1X^+$，．由命题 2，知 M_1 为极大前缀码．

(2) 令 $yM_0 \subseteq M$，则$\{y\}' \in (yM_0)'$，从而 $M_2' = (M \setminus yM_0)' \cup \{y\}' = M' \setminus yM_0'$．由于

$M_2X^+ = (M \quad yM_0)X^+ \cup yX^+ = (MX^+ \setminus yM_0X^+) \cup yX^+ = MX^+ \cup yM_0'$．

这样，$X^+ = M' \dot{\cup} MX^+ = (M' \setminus yM_0') \dot{\cup} (MX^+ \cup yM_0') = M_2' \dot{\cup} M_2X^+$．由命题 2，知 M_2 为极大前缀码．

由于 X 本身为极大前缀码，下面结论是显然的．

推论 2　[1，命题 2.7] 如果 M 为 X 上的极大前缀码，那么

(1)若 $y \in M$，则 $M_1 = (M \setminus \{y\}) \cup yX$ 为极大前缀码；

(2)若 $yX \in M$，则 $M_2 = (M \setminus yX) \cup \{y\}$为极大前缀码．

令 X^* 为带长度的自由幺半群，对任意 X^* 中的字 x，$lg(x)$记 x 中出现 X 的字母的个数．对任意语言 $A \subseteq X^*$，记 $Lg(A) = \max\{lg(x) \mid x \in A\}$如果存在的话．

命题 3　若 A 为 X 上的前缀码且 $Lg(A) = n$，则下列条件等价：

(1) A 为极大前缀码；

(2) $X^n \subseteq A \cup AX^+$；

(3) $X^m \subseteq AX^+$，$m \geq n+1$．

证明：(1)⇒(2)因为 $Lg(A) = n$，所以 $X^n \cap A = X^n \cap A'$．进一步，由命题 2，可得 $X^n = X^n \cap X^+ = X^n \cap (A' \cup AX^+) = X^n \cap (A \cup AX^+) \subseteq A \cup AX^+$．

(2)⇒(1)对任意 $x \in X^+$，如果 $lg(x) \leq n$，则存在 $u \in X^*$，使得 $xu \in X^n \subseteq A \cup AX^+$，因而存在 $a \in A$，$v \in X^*$，使得 $xu = av$ 即 $x \in A' \cup AX^+$；如果 $lg(x) > n$，则有 $x \in X^nX^+ \subseteq (A \cup AX^+)X^+ = AX^+$，即 $X^+ = A' \cup AX^+$．由于 A 为 X 上的前缀码，根据命题 1 与命题 2，为极大前缀码．

(1)⇒(3)设 A 为极大前缀码，那么，由(2)，知

$X^m = X^m \cap X^+ = X^m \cap (A' \cup AX^+) = (X^m \cap A') \cup (X^m \cap AX^+) = X^m \cap AX^+ \subseteq AX^+$．

(3)⇒(1)对任意 $x \in X^+$，我们考虑如下两种情况：

i) $lg(x) \leq m$．则存在 $u \in X^*$，使得 $xu \in X^m \subseteq AX^+$，因而存在 $a \in A$，$v \in X^+$使得，$xu = av$，即 $x \in A' \cup AX^+$；

(下转第 140 页)

和 $Ax+Lx$ 的闭性自动满足.事实上,当 A 为单值算子时,本文结论仍是新的,定理1—4只要求了算子存在一个上解或下解且条件(Ⅱ),(Ⅳ),(Ⅳ)′,(Ⅲ)′比一般文献中使用的 *Lipschilz* 条件更为广泛,本文的结果推广了文[3,5]的相应结果.

参考文献:

[1] 郭大钧.非线性泛函分析[M].济南:山东科学技术出版社(第二版),2002.

[2] 郭大钧.非线性分析中的半序方法[M].济南:山东科学技术出版社,2000.

[3] 李志龙.一类集值算子的不动点定理[J].江西师范大学学报,2000,24(2):122—125.

[4] 孙经先.不连续的增算子不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用[J].数学学报,1988,31:101—107.

[5] 张克梅.集值算子的最小,最大拟不动点对的存在定理[J].曲阜师范大学学报,1999,(1):13—16.

Fixed Points of a Class of Set-valued Operators

LI Zhi-long

(School of Informational Management,Jiangxi University of Finance and Economics,Nanchang 330013,China)

Abstract:In this paper,the existence of fixed points of a class of set-valued operators is studied and obtained,also the sequence convergent to the fixed point is given.

Key words:set-valued operators;fixed points.

(上接第133页)

ii) $lg(x)>m$.则 $x\in X^mX^+\subseteq AX^+X^+\subseteq AX^+$,即 $X^+=A'\cup AX^+$.由于A为X上的前缀码,椐命题1与命题2,A为极大前缀码.

基于命题3,我们可以得到下面结果.

推论3 如果A为X上的前缀码并且 $Lg(A)=n$,那么存在X上的极大前缀码M满足 $A\subseteq M$,$Lg(M)=n$.

证明 我们将证明,$M=A\cup(X^n\setminus AX^+)$ 是所要求的极大前缀码.因为

$M^c=A^c\cup(X^n\setminus AX^+)^c$,$A\cap(X^n\setminus AX^+)^c=\emptyset$ 且 $(X^n\setminus AX^+)\cap(X^n\setminus AX^+)^c=\emptyset$,所以 $M\cap M^c=\emptyset$,进而,M为X上的前缀码,且 $Lg(M)=n$.另一方面,由于 $MX^+=AX^+\cup(X^n\setminus AX^+)X^+\supseteq AX^+$,有 $X^n\subseteq M\cup MX^+$.再由命题3,知M极大前缀码.

参考文献:

[1] H.J.Shyr. Free monoids and languages [M]. Taiwan: Hon Min Book Company, 2001.

[2] Y.B. Cha and H.J. Shyr. Some algebraic properties of prefix codes [J]. Nanta Mathematica, 1976, 5(2): 143—146.

[3] J.M. Howie. An introduction to semigroup theory [M]. London: Academic Press, 1976.

A Note on Prefix Codes

CHEN Hui[1],LIU Er-gen[2], GUO Xiao-jiang

(1.Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal Uni., Nanchang 330022;2.School of Basic Science, East China Jiaotong Uni., Nanchang 330013,China)

Abstract:The aim of this paper is to study prefix codes. We obtain some properties of prefix codes and especially establish some characterizations of maximal prefix codes. These extend some results of Shyr on prefix codes.

Key words:free monoid;language;prefix code;maximal prefix code