文章编号:1005-0523(2006)04-0134-04

收缩圈不影响图的hamiltonican index

尧雪莉[1],刘展鸿[1],熊黎明[2],王 璐[1]

(1.江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;2.北京理工大学 理学院,北京 100081)

摘要:图G的hamiltonian index是指使G的k次迭线图$L^k(G)$成为哈密顿图的最小整数k.Xiong Li Ming等在[3]和[4]证明了无论是收缩由图G中度数大于等于3的点所生成的图的所有非平凡分支还是收缩图G的$A_G(F)$-contractible子图F都不会影响图G的hamiltonian index.证明了:图G收缩满足一定条件的圈也不会改变它的hamiltonian index.

关 键 词:hamiltonian index;枝;收缩

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

1 引言

本文考虑的图均是指有限无向无环允许重边的图,未见定义的术语和符号参见[1].

设H是图$G=(V,E)$的一个子图,$V(H)$和$E(H)$分别表示H的顶点集和边集,$|V(H)|$和$|E(H)|$分别表示H的顶点数和边数,对于H的任意顶点u,它在H中的度数记为$d_H(u)$.H的两个子图G_1,G_2在H中的距离(记为$d_H(G_1,G_2)$)定义为$\min\{d_H(u_1,u_2): u_1 \quad V(G_1)$且$u_2 \quad V(G_2)\}$,其中$d_H(u_1,u_2)$表示$H$中从$u_1$到$u_2$的最短路的路长.用$c_i$表示顶点个数为$i$的圈.

图G的线图(记为$L(G)$)是指以G的边集为顶点集且$L(G)$的两个顶点(即G的两条边)邻接当且仅当它们在G中是关联的.对于整数$n\geq1$,n次迭线图(记为$L^n(G)$)递归地定义为$L(L^{n-1}(G))$,其中$L^0(G)=G$且$L^1(G)=L(G)$.图G的hamiltonian index(记为$h(G)$)是指使$L^n(G)$为哈密顿图的最小整数n.

记$V_i(G)=\{v\in V(G): d_G(v)=i\}$和$W(G)=V(G)\setminus V_2(G)$.$G$中的一条路叫做枝是指它的端点在$W(G)$中且内点均在$V_2(G)$中.如果一条枝的长度为1,那么它就没有内点.用$B(G)$表示$G$中所有的枝集合.记$B_1(G)=\{b\in B(G): V(b) I V_1(G)\neq\phi\}$.记$B_H(G)=\{b\in B(G): E(b)\subset E(H)\}$.

对于集$S\subseteq V(G)$或$E(G)$我们用$G[S]$表示S在G中的导出子图.

令$E_k(G)$表示G中满足下列条件的子图的集合.

(i)H的每一个顶点都是偶度,即对$x\in V(H)$都有$d_H(x)\equiv0(\mathrm{mod}2)$;

(ii)$V_0(H)\subset \underset{i=3}{\overset{\triangle(G)}{Y}} V_i(G)\subset V(H)$;

(iii)对于H的任何子图H_1,都有$d_G(H_1,H-H_1)?\ k\ 1$;

(iv)对于G中的任何枝b,若$E(b) I E(H)=\phi$,都有$|E(b)|\leq k+1$;

(v)若$b\in B_1(G)$,则$|E(b)|<k$.

定理1[2] 设G是一个连通图且不含顶点个数为2的圈,$n\geq2$(n为整数),则$h(G)\leq n$当且仅当$EU_n(G)=\phi$.

设F为G的子图,用G/F表示由图G收缩子

收稿日期:2006-03-09

作者简介:尧雪莉(1982-),女,江西黎川人,江西师范大学数信学院2004级图论方向的研究生.

图 F 中所有边，并将产生的环删除而到的图；用 $G|F$ 表示由图 G 将子图 F 的所有顶点看作一个新的顶点 v_F(则 G 中两个顶点都属于 $V(F)$ 的边变成了环)，并将产生的每个环用与 v_F 关联的悬挂边(有一个顶点度数为 1 的边)取代而得到的图. 可知 $|E(G)|=|E(G|_F)|$ 且 G/F 与 $G|F$ 删除新增悬挂边是等价的.

由[4]可知，一个图收缩圈 C_3 并不会影响它的 hamiltonian index，但收缩 $C_i(i\geq 4)$ 却不能保证 hamiltonian index 不变，本文将证明连通图在满足一定条件下收缩 $C_i(i\geq 4)$ 并不影响它的 hamiltonian index，且圈可收缩的长度范围是最好可能的.

2　定理的证明

引理 2[3]　设 G 是欧拉图且 H 为 G 的子图，那么 G/H 也是欧拉图.

下面我们给出本文的主要结果. 且下面定理的证明与[3]中定理的证明类似.

定理 3　设 G 为连通图，令 $G'=G|_{C_i}$，$(i\leq 2k+3)$若 $h(G)\geq k\geq 2$，$h(G')\geq k$，(k 为整数)，那么 $h(G)=h(G')$.

证明　设 G' 在中由收缩 G 中 C_i 的顶点集而得到的顶点记为 v_{c_i}. 由 $G'=G|_{C_i}$，有断言 1：(除了 G 中两个端点都属于 $V(C_i)$ 的枝以及 G' 中新增的悬挂边) G 和 G' 有相同的枝集合.

下面我们先证 $h(G')\leq h(G)$. 由 $h(G)\geq 2$ 及定理 1，$\exists$ $H\in EU_{h(G)}(G)$. 令 H' 是由 $H|_{C_i}$ 删除新增悬挂边而得的图. 下面证 $H'\in EU_{h(G)}(G')$，即证明 H' 满足定理 1 中属于 $EU_n(G)$ 的五个条件. 由引理 2 可知 H' 满足(i). 由 H 满足(ii)知 H' 也满足于(ii). 由断言 1 及 H' 的定义知 H' 满足(iv)和(v). 为证明 H' 满足(iii)，只需考虑这样的(使 $d_{G'}(K',H'-K')\geq 2$)的 H' 的子图 K'. 令 $K=H[V_k\cup V_k]$，其中 $V_k=V(K')\cap V(G)$，$V_k=\{x|x\in V(C_i)，d_G(x)\geq 3\}$ (当 $v_{C_i}\in V(K')$)或当($v_{C_i}\notin V(K')$)，明显，$K\subseteq H$，令 p 为 G 中一条从 K 到 $H-K$ 的最短路，令 $p'=G[E(p)\cap E(G')]$，则 p' 是 G' 中一条从 K' 到 $H'-K'$ 的路，所以 $d_{G'}(K',H'-K')\leq|E(p')|\leq|E(p)|=d_G(K,H-K)\leq h(G)-1$，所以 H' 满足(iii). 所以 $H'\in EU_{h(G)}(G')$，由定理 1 有 $h(G')\leq h(G)$.

下面证 $h(G)\leq h(G')$. 由 $h(G')\geq 2$ 以及定理 1，知道 $\exists H'\in EU_h(G')(G')$(且取 H' 为 $EU_h(G')(G')$ 中顶点数最多的那个图). 下面从 H' 构造一个图 H，使得 $H\in EU_{h(G')}(G)$. 令 $V_b(H')=\{x\in V(C_i)，x$ 为 $B_{H'}(G)$ 为某个枝的端点$\}$；令 $\gamma(x)$ 为在 $B_{H'}(G)$ 中以 x 为端点的枝的个数；$V_b^j=\{x\in V_b(H')$；$\gamma(x)\equiv j(\mathrm{mod}2)\}$；$m=\{G$ 中满足下面 2 个条件的圈的个数；条件①此圈恰好包含 $V(C_i)$ 中的一个顶点，②除了这个顶点其他顶点的度数都为 2$\}$. 则 $r(x)+r(x)+2m=d_{H'}(v_{C_1}$. 因为 $H'\in EU_{h(G')}(G)$，所以 $d_{H'}(U_{ci})$ 是偶数. 因为 $\sum_{x\in V_b^0}r(x)$ 是偶数，所以 $\sum_{x\in V_b^1}r(x)$ 是偶数. 因为当 $x\in V_b^1$，$r(x)$ 是奇数，所以 $|V_b^1|$ 是偶数.

下面分两种情况构造图 H 并且证明 $H\in EU_{h(G')}(G)$.

(1) $|V_b^1|=0$ 时. 令 $V(H)=V(C_i)\cup V(H')\setminus\{v_{C_i}\}$，$E(H)=E(H')\cup E(C_i)$. 下证 $H\in EU_{h(G')}(G)$，即 H 满足定理 1 中属于 $EU_n(G)$ 五个条件. 显然 H 满足(i)和(ii). 由 H' 的选取(H' 为 $EU_{h(G')}(G')$ 中顶点个数最多的图)可知 H 中包含了 G 中所有两个端点都属于 $V(C_i)$ 枝，再根据断言 1，可知 H 满足(iv)和(v). 要证 H 满足(iii)，只需考虑这样的(使 $d_G(K,H-K)\geq 2$)的 H 的子图 K. 因为 $C_i\subset H$ 且 C_i 为连通图，所以 $V(K)\cap V(C_i)=\varnothing$ 或者 $V(K)\cap V(C_i)=V(C_i)$. 令 $K'=K/C_i$，则 $K'\subseteq H'$，令 $p'=x'u_1u_2\Lambda u_ty'$ 是 G' 中从 K' 到 $H'-K'$ 的一条最短路，显然$\{u_1,u_2,\Lambda,u_t\}\subseteq V(G)$，由 K' 的定义知 $\exists$ $x\in V(K)$，$y\in V(H-K)$，满足 xu_1，$u_ty\in E(G)$，所以 $p=xu_1u_2\Lambda u_ty$ 是一条从 K 到 $H-K$ 的路. 所以 $d_G(K,H-K)\leq|E(p)|\leq|E(p')|=d_G(K',H'-K')\leq h(G')-1$，则 $H\in EU_{h(G')}(G)$. 所以 $h(G)\leq h(G')$.

(2) $|V_b^1|\geq 2$. 令 $C_i=w_1w_2\Lambda w_iw_1$. 从 w_1,w_2,L,w_i 中按下标从小到大(模 i)的顺序依次取 V_b^1 中的点，记为 $u_1,v_1,u_2,v_2,\Lambda,u_s,v_s$；用 $p(u_j,v_j)$ 记在 C_i 上从 u_j 到 v_j 的路(选择下标从小到大模(i)的那一条). V_b^1 中的这 $2S$ 个点将 C_i 分成 $2S$ 段，我们假设 $p(u_1,v_1)$ 为这 $2S$ 条路中路长最长的. 令 $p(V_b^1)=\bigcup_{j=1}^{s}p(u_j,v_j)$(在满足 $p(u_1,v_1)$ 为 $2S$ 条路中最长的前提下，使 $|E(p(V_b^1))|$ 最大). 令 $V(H)=V(H')\setminus\{v_{c_i}\}\cup^c\bigcup_{j=3}^{D(G)}V_j(G)\cup V(p(V_b^1))$，$E(H)=E(H')\cup\{e\in E(p(V_b^1))\}$. 下证 H 满足定理 1 中的 5 个条件. 由

H 的构造可知 H 满足(i),(ii)·对于任意枝 $b\in B(G)$,若 $E(b)\,I\,E(H)=f$ 且 $E(b)\in E(C_i)$,则 $E(b)\leq k+1\leq h(G^{'})+1$.(否则若 $E(b)\geq k+2$,则由 $p(u_1,v_1)$ 的选取,有 $|E(p(u_1,v_1))|\geq k+2$,所以 $|C_i|\geq 2k+4$,与 $|C_i|\leq 2k+3$ 矛盾)·则由 $H^{'}$ 的选取以及断言 1 知 H 满足($\dot{w}$)和(v)·下面证 H 满足(iii),只需考虑这样的(使 $d_G(K,H-K)\geq 2$ 的 H 的子图 K·因为 $p(u_j,v_j)\subseteq H$ 且 $p(u_j,v_j)$ 为连通图,所以 $V(K)\,I\,V(p(u_j,v_j))=AE$ 或者 $V(K)\,I\,V(p(u_j,v_j))=V(p(u_j,v_j))$· K 的选取分两种情况讨论:①若 $V(K)\,I\,V(C_i)\,I\,V(H)=AE$ 或 $V(K)\,I\,V(C_i)\,I\,V(H)=V(H)\ I\,V(C_i)$,令 $K^{'}=K/C_i$ 则 $K^{'}\subseteq H^{'}$·令 $p^{'}=x^{'}u_1u_2\cdots u_ty^{'}$ 是 $G^{'}$ 中从 $K^{'}$ 到 $H^{'}-K^{'}$ 的一条最短路,由 K 的选取,则 $\exists\,x\in V(K)$,$y\in V(H-K)$,满足 xu_1,$u_ty\in E(G)$,所以 $p=xu_1u_2\cdots u_ty$ 是一条从 K 到 $H-K$ 的路,所以 $d_G(K,H-K)\leq|E(p)|=|E(p^{'})|=d_G(K^{'},H^{'}-K^{'})\leq h(G^{'})-1$.②否则令 $V_1=V(K)\,I\,V(C_i)\,I\,V(H)$,$V_2=\{V(C_i)\,I\,V(H)\}\setminus V_1$,因为 $d_G(K,H-K)\leq d_{C_i}(V_1,V_2)$,所以若证得 $d_{C_i}(V_1,V_2)\leq k-1$,则 $d_G(K,H-K)\leq k-1\leq h(G^{'})-1$,则 H 满足(iii)·下面证 $d_{C_i}(V_1,V_2)\leq k-1$,也分两种情况讨论:

情况 1 当 $|V_b^1|=2$.因为要么 $V(K)\,I\,V(p(u_1,v_1))=AE$ 要么 $V(K)\,I\,V(p(u_1,v_1))=V(p(u_1,v_1))$,所以 $V_b^0I(V(C_i)\setminus V(p(u_1,v_1))$(否则属于上面情况①)·所以 V_1 或 V_2 中必包含 V_b^0 中的点,所以 $d_{C_i}(V_1,V_2)$? k 1 ($Q|C_i|$? $2k$ 3 且 $E(p(u_1,v_1))$? k 2)得证·

情况 2 当 $|V_b^1|\geq 4\,\Lambda(a)$

若 $d_{C_i}(V_1,V_2)\geq k\Lambda(b)$

由 $p(u_1,v_1)$ 的选择假设,则 $|E(p(u_1,v_1))|\geq k\Lambda(c)$

在 C_i 从 V_1 到 V_2 的路至少有两条·因为 $d_{C_i}(V_1,V_2)\geq k$ 所以另一条路长 $\geq k\Lambda(d)$

又因为 $|E(p(u_2,v_2))|\geq 1\,\Lambda(e)$

所以 $|C_i|$? $|E(p(u_1,v_1))|$ $|E(p(u_2,v_2))|+2d_{C_i}(V_1,v_2)$? $3k$ $1L(f)$

当 $k\geq 3$ 时,$3k+1>2k+3$,则与 $|C_i|\leq 2k+3$ 矛盾,所以 $d_{C_i}(V_1,V_2)\leq k-1$.又当 $k=2$ 时,$3k+1=2k+3$,所以只有(f)式取等号才不会产生矛盾,而(f)式取等号当且仅当(a)、(b)、(c)、(d)、(e)同时取等号,则 $C_{2k+3}=C_7$,且 V_b^1 中的四个点 u_1,v_1,u_2,v_2 在 C_7 上的顺序只有如图 1 所示的一种情况(否则 $d_{C_i}(V_1,V_2)\leq 1$)这样与我们使 $|E(p(V_b^1))|$ 最大矛盾,只有按图 1 中小括号内标的方式选取才能使 $|E(p(V_b^1))|$ 最大·所以这种情况不存在,则 $d_{C_i}(V_1,V_2)\leq k-1$,所以 H 满足(iii),则 $h(G)\leq h(G^{'})$,证毕·

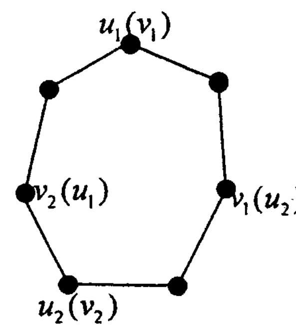

图 1 G = C₇

注记:为了利用定理 1,我们必须保证 $h(G)\geq 2$.定理 3 中的条件 $h(G^{'})\geq k$ 是必不少的·(例如图 2 中这样一个例子,$h(G)=2$ 与定理 3 中条件对应,取 $k=2$,若不保证 $h(G^{'})\geq k$,$\Theta h(G^{'})=h(G|_{C_i})=1$,则 $h(G)\neq h(G^{'})$)·而且定理 3 中圈可收缩的长度范围是最好可能的·(如图 3 中这样一个例子,在 G 中枝 b_1,b_2,b_3 的长度相等且长为 $k+2$,枝 b_4 长度为 k,C_{2k+4} 是由枝 b_1,b_2 构成的圈·由[3]知 $h(G)=k+1$,G 收缩 C_{2k+4} 后,$h(G^{'})=h(G|_{C_{2k+4}})=k$,则 $h(G)\neq h(G^{'})$,所以可收缩的圈最长为 $2k+3$)·

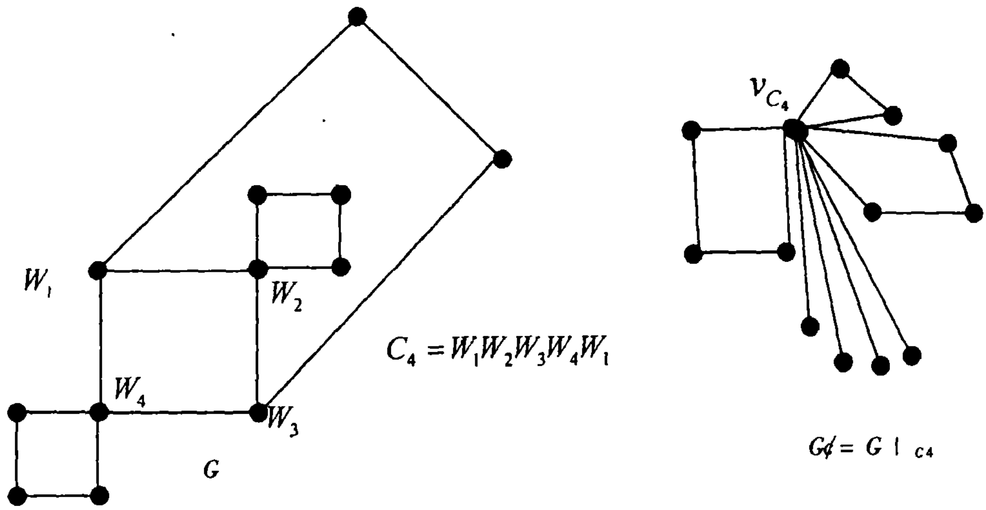

图 2　$h(G)=2$ 而 $h(G|_{C_4})=1$

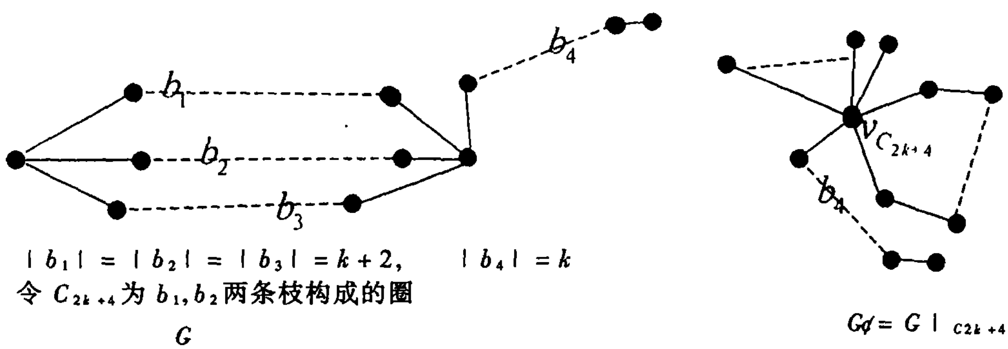

图 3　$h(G)=k+1$ 而 $h(G|_{C_{2k+4}})=k$

参考文献：

[1] Bondy，J. A：Murty，U. S. R ：Graph theory with applicatons Macmillan，London and Elsevier，New York，1976.

[2] L. Xiong，Z. Liu，Hamiltonian iterated line graph，Discrete Math. 256(2002)47-422.

[3] L. Xiong，H. J. Broersma，The hamiltonian index of a graph and its branch bands，Discrete Math. 285(2004)27288.

[4] L. Xiong，Zdenek Ryjacek，On stability of the Hamiltonian index under contractions and closures. J Graph Theory (2004) 104-115.

[5] Zdenek Ryjacek，R. H. Schelp，Contractibility techniques as a closure concept. J Graph Theory(2002).

On Stability of the Hamiltonian Index under Contractions of the Cycle

YAO Xue-li[1]，LIU Zhan-hong[1]，XIONG Li-ming[2]，WANG Lu[1]

(1. Institute of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang 330022；2. Department of Mathematics，Beijing Institute of Technology，Beijing 100081，China)

Abstract：The Hamiltonian index of a graph G is the smallest integer k such that the k-th iterated line graph of G is Hamiltonian. Xiong Liming et al[3]and[4]prove that neither the contraction of all nontrivial components of $G[\{v: d_G(v)\geq 3\}]$ nor the contraction of an $A_G(F)$ − *contractible* subgraph F affacts the value of the Hamiltonian index of a graph. In this paper，we show that the contraction of a cycle of a graph G which satisfies some conditions also doesnot affets its Hamiltonian index.

Key words：Hamiltonian index；branch；contraction.