

文章编号: 1005—0523(2006)04—0149—04

带延迟的双险种复合 Poisson 风险模型

王 响

(广东金融学院 应用数学系, 广东 广州 510520)

摘要: 由于保险公司风险经营规模的不断扩大, 考虑到单险种风险模型的局限性, 研究了带延迟的双险种复合 Poisson 风险模型, 给出了该模型破产概率的表达式及有限时间生存概率等重要指标.

关 键 词: 有限时间破产概率; 破产概率; 生存概率; Poisson 过程

中图分类号: O21

文献标识码: A

0 引言与模型

经典风险模型及其拓广模型为描述单一险种风险模型经营过程提供了各种数学模式, 并且得到了比较完善的结果, 如 Grandell^[1], Asmussen^[2], Rolshia^[3]. 但是随着风险经营规模的不断扩大, 保险公司会不断投资新的险种. 针对这种情形, 本文考虑了带延迟的双险种 Poisson 风险模型, 即保险公司起初只经营一个险种, 一段时间后又增加了一个险种, 给出了该模型破产概率 $\Psi(u)$ 的表达式以及有限时间生存概率等重要指标.

定义 1.1 定义模型:

$$R(t) = u + c_1 t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i^{(1)} + \{c_2(t - T_1) - \sum_{j=1}^{N_2(t-T_1)} Z_j^{(2)}\} I_{\{t > T_1\}} \quad (1-1)$$

其中, T_1 是非负有限随机变量, $N_1(t)$, $N_2(t)$ 是相互独立的 Poisson 过程, 设其参数分别为 λ_1 和 λ_2 , $\{Z_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{Z_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ 是相互独立的非负随机变量序列, $\{Z_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布序列, 设其分布函数为 $F_1(z)$, 均值 $EZ^{(1)} = \mu_1$, $\{Z_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ 也是独立同分布序列, 设其分布函数为 $F_2(z)$, 均值 $EZ^{(2)} = \mu_2$. 而且, T_1 , $N_1(t)$, $N_2(t)$, $\{Z_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Z_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ 是相互独立的. 不失一般性, 假设各随机变量均定义在同一完备概率空间 $\{\Omega, F, P\}$. $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ 是实常数, $u \geq 0$ 是初始值, 是实常数. 我们称此模型为带延迟的双险种复合 Poisson 风险模型. I_c 表示示性函数, 即: $I_c(\omega) = 1$, 如果 $\omega \in C$; 否则 $I_c(\omega) = 0$.

这个模型的直观意义是: 初始时刻 $t=0$, 保险公司投放了 1 个险种, 其保费率是 c_1 , 索赔到达时刻是用点过程 $N_1(t)$ 来描述的, 索赔额用非负随机序列 $\{Z_i^{(1)}\}_{i \geq 0}$ 来描述的. 在时刻 T_1 , 保险公司扩大业务规模, 又投放了 1 个新险种, 其保费率为 c_2 , 索赔到达时刻是用点过程 $N_2(t)$ 来描述的, 索赔额用非负随机序列 $\{Z_j^{(2)}\}_{j \geq 0}$ 来描述的.

为了保证稳定经营, 假设 $c_1 - \lambda_1 \mu_1 > 0$, $(c_1 + c_2) - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) > 0$. 并且, 假设 $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 0$.

收稿日期: 2006—03—26

作者简介: 王响(1980—), 女, 湖南永州人, 助教, 主要从事保险风险理论研究.

令: $h_1(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma x} dF_1(x) - 1$; $h_2(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma x} dF_2(x) - 1$;

我们总假设存在 $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, 使得当 $\gamma \uparrow \gamma_1$, 有 $h_1(\gamma) \uparrow +\infty$, 当 $\gamma \uparrow \gamma_2$, 有 $h_2(\gamma) \uparrow +\infty$.

由风险模型(1-1)知:

$$t \leq T_1 \text{ 时, } R(t) = u + c_1 t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i^{(1)}, \text{ 是个复合 Poisson 模型; } \quad (1-2)$$

$$t > T_1 \text{ 时, } R(t) = u + c_1 T_1 - \sum_{i=1}^{N_1(T_1)} Z_i^{(1)} + (c_1 + c_2)(t - T_1) - \sum_{i=N_1(T_1)+1}^{N_1(t)} Z_i^{(1)} - \sum_{j=1}^{N_2(t-T_1)} Z_j^{(2)} \quad (1-3)$$

因此 $R(t)$ 不再具有平稳增量性, 研究单险种的更新方法和鞅方法不再适用. 为了研究 $R(t)$ 的破产概率、有限时间生存概率, 我们要引入下面两个辅助模型:

$$R_1(t) = u + c_1 t - \sum_{i=1}^{N_1 t} Z_i^{(1)}$$

$$R_2(x, t) = x + (c_1 + c_2)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i^{(1)} - \sum_{j=1}^{N_2 t} Z_j^{(2)}$$

易见, $R_1(t)$ 是复合 Poisson 模型, $R_2(x, t)$ 是初始值为 x 的双险种风险赢余过程.

记 $R_1(t)$ 的有限时间破产概率和有限时间生存概率分别为:

$$\Psi_1(u, t) = P(R_1(s) < 0, \exists s, 0 < s \leq t);$$

$$\phi_1(u, t) = 1 - \Psi_1(u, t)$$

记 $R_2(x, t)$ 的有限时间破产概率、有限时间生存概率、破产概率、生存概率分别为:

$$\Psi_2(x, t) = P(R_2(x, s) < 0, \exists s, 0 < s \leq t);$$

$$\phi_2(x, t) = 1 - \Psi_2(x, t);$$

$$\Psi_2(x) = P(R_2(x, t) < 0, \exists t > 0);$$

$$\phi_2(x) = 1 - \Psi_2(x).$$

记 $R(t)$ 的有限时间破产概率、有限时间生存概率、破产概率、生存概率、破产时间分别为:

$$\Psi(u, t) = P(R(s) < 0, \exists s, 0 < s \leq t);$$

$$\phi(u, t) = 1 - \Psi(u, t);$$

$$\Psi(u) = P(R(t) < 0, \exists t > 0);$$

$$\phi(u) = 1 - \Psi(u);$$

$$T = \inf\{t: R(t) < 0 | R(0) = u\}$$

约定: Φ 表示空集, $\inf\{\Phi\} = +\infty$, $T = +\infty$, 表示不破产.

2 主要结果

$$\text{令: } S_1(t) = \sum_{i=1}^{N_1 t} Z_i^{(1)}$$

设 $S_1(t)$ 分布函数为 $F_{s_1(t)}(x)$, 易知:

$$F_{s_1(t)}(x) = e^{-\lambda_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t} F_1^{*k}(x)$$

其中 $F_1^{*n}(x)$ 表示 $F_1(x)$ 的 n 重卷积, $F_1^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $F_1^{*0} F_1^{*n}(x) = F_1^{*n}(x)$, 在本文中, “*” 均表示函数的卷积. 由于 $R_1(t)$ 是复合 Poisson 模型, 所以 $R_1(t)$ 的有限时间生存概率满足 Seal 公式:

$$\text{引理 2.1}^{[3]}: (1) \phi_1(0, t) = \frac{1}{c_1 t} \int_0^{c_1 t} F_{s_1(t)}(s) ds \quad (2-4)$$

$$(2) \text{ 如果 } u > 0, \phi_1(u, t) = F_{s_1(t)}(u + c_1 t) - \int_0^t \phi_1(0, t-v) dF_{s_1(t)}(u + c_1 v). \quad (2-5)$$

$$\text{令: } S_2(t) = \sum_{j=1}^{N_2(t)} Z_j^{(2)}$$

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t).$$

$S(t)$ 是复合泊松过程^[5],即 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, 其中 $N(t)$ 是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程, $\{Z_i\}_{i>0}$ 是独立同分布非负随机序列, 设其分布函数为 $F(z)$, 均值为 μ , 有

$$F(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(z) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(z);$$

$$\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \mu_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \mu_2.$$

所以 $R_2(x, t) = x + (c_1 + c_2)t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, 可以看作是单险种的复合泊松过程. 因此, $R_2(x, t)$ 的有限时间生存概率也满足 Seal 公式:

$$(1) \quad \phi_2(0, t) = \frac{1}{(c_1 + c_2)t} \int_0^{(c_1 + c_2)t} F_{s(t)} ds \quad (2-6)$$

$$(2) \quad \text{如果 } x > 0, \phi_2(x, t) = F_{s(t)}(x + (c_1 + c_2)t - \int_0^t \phi_2(0, t-v) dF_{s(t)}(x + (c_1 + c_2)v)) \quad (2-7)$$

其中, $F_{s(t)}(S)$ 是 $S(t)$ 的分布函数, 有:

$$F_{s(t)}(S) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} F^{*k}(s)$$

$R_2(x, t)$ 的破产概率 $\Psi_2(x)$ 满足下面的更新方程^[1]

$$\Psi_2(0) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\mu}{c_1 + c_2} \quad (2-8)$$

$$\Psi_2(x) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c_1 + c_2} \int_x^{\infty} (1 - F(z)) dz + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c_1 + c_2} \int_0^x \Psi_2(x-z)(1 - F(z)) dz \quad (2-9)$$

显然, 当 $x < 0$ 时, $\Psi_2(x) = 1$.

设 $X(T_1) = u + c_1 T_1 - \sum_{i=1}^{N_1(T_1)} Z_i^{(1)}$, 令 $G(T_1, x) = P(X(T_1) \leq x | T_1)$, $G(T_1, x)$ 是 T_1 的复合随机变量.

$$\text{命题 2.2} \quad G(T_1, x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 T_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 T_1} F_1^{*k}(u + c_1 T_1 - x), & x \leq u + c_1 T_1 \\ 1, & x > u + c_1 T_1 \end{cases}$$

$$\text{证明} \quad G(T_1, x) = P(X(T_1) \leq x | T_1) = P\left(\sum_{i=1}^{N_1(T_1)} Z_i^{(1)} \geq u + c_1 T_1 - x | T_1\right)$$

当 $x > u + c_1 T_1$ 时, 显然, $G(T_1, x) = 1$;

当 $x \leq u + c_1 T_1$ 时,

$$\begin{aligned} G(T_1, x) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{N_1(T_1)} Z_i^{(1)} < u + c_1 T_1 - x | T_1\right) \\ &= 1 - E[F_1^{*N_1(T_1)}(u + c_1 T_1 - x) | T_1] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 T_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 T_1} F_1^{*k}(u + c_1 T_1 - x) \end{aligned}$$

定理 2.3 设 T_1 的分布为 $F_{T_1}(t)$, 则 $R(t)$ 的破产概率为:

$$\Psi(u) = \int_0^{\infty} [\Psi_1(u, t) + \phi_1(u, t) \int_0^{u+c_1 t} \Psi_2(x) G(t, dx)] dF_{T_1}(t),$$

其中, $\phi_1(u, t)$ 满足(2-4)(2-5)式, $\Psi_1(u, t) = 1 - \phi_1(u, t)$, $\Psi_2(x)$ 满足(2-8)(2-9)式, $G(t, x)$ 是命题 2.2 中 $G(T_1, x)$ 当时 $T_1 = t$ 的形式.

证明 由 $R(t)$ 的定义知 $R(t)$ 满足(1-2)(1-3)式. $\{Z_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布随机序列, $N_1(t)$ 是齐次泊松过程, 具有平稳独立增量性, 因此 $R(t)$ 与 $R_1(t)I_{t \leq T_1} + R_2(X(T_1), t - T_1)I_{t > T_1}$ 的分布相同. 在给定 T_1 的条件下, 由 $R_2(x, t)$ 的平稳独立增量性知 $R_2(X(T_1), t - T_1)I_{t > T_2}$ 与 $R_2(X(T_1), t)I_{t > 0}$ 的分布相同, 且盈余 $R(t)$ 在 T_1 以前与 T_1 以后是相互独立的. 又因为:

$$P(T \leq T_1) = E[P(R(t) < 0, \exists t \leq T_1 | T_1)] = E[P(R_1(t) < 0, \exists t \leq T_1 | T_1)] = \int_0^{\infty} \Psi_1(u, t) dF_{T_1}(t) P(T > T_1, T < \infty)$$

$$= E[P\{R(t) \geq 0, \forall t \leq T_1, \exists t_0 > T_1, R(t_0) < 0 | T_1, X(T_1)\}]$$

$$= E[P\{R_1(t) \geq 0, \forall t \leq T_1, \exists t_0 > T_1, R_2(X(t_0), t_0 - T_1) < 0 | T_1, X(T_1)\}]$$

$$= E[P\{R_1(t) \geq 0, \forall t \leq T_1 | T_1, X(T_1)\} P\{\exists t_0 > 0, R_2(X(T_1), t_0) < 0 | T_1, X(T_1)\}] \\ = \int_0^\infty \phi_1(u, t) \int_0^{u+c_1t} \Psi_2(x) G(t, dx) dF_{T_1}(t)$$

所以,

$$\Psi(u) = P(T < T_1) + P(T \geq T_1, T < \infty) = \int_0^\infty [\Psi_1(u, t) + \phi_1(u, t) \int_0^{u+c_1t} \Psi_2(x) G(t, dx)] dF_{T_1}(t).$$

推论 2.4 $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0$.

定理 2.5 $R(t)$ 的有限时间生存概率为:

$$\phi(u, t) = \phi_1(u, t)(1 - F_{T_1}(t)) + \int_0^u \phi_1(u, v) \int_0^{u+c_1v} \phi_2(x, t-v) G(v, dx) dF_{T_1}(v).$$

证明: 因为 $\phi(u, t) = P(R(s) > 0, \forall 0 < s \leq t, t \leq T_1) + P(R(s) > 0, \forall 0 < s \leq t, t > T_1)$

$$P(R(s) > 0, \forall 0 < s \leq t, t \leq T_1) = P(R_1(s) > 0, \forall 0 < s \leq t) P(t \leq T_1) = \phi_1(u, t)(1 - F_{T_1}(t))$$

$$P(R(s) > 0, \forall 0 < s \leq t, t > T_1)$$

$$= E[P(R(s) > 0, \forall 0 < s \leq T_1, R(s) > 0, \forall T_1 < s \leq t | T_1 < t, X(T_1))]$$

$$= E[P(R_1(s) > 0, \forall 0 < s \leq T_1, R_2(X(T_1), s - T_1) > 0, \forall T_1 < s \leq t | T_1 < t, X(T_1))]$$

$$= E[P(R_1(s) > 0, \forall 0 < s \leq T_1 | T_1 < t, X(T_1)) P(R_2(X(T_1), s) > 0, \forall 0 < s \leq t - T_1 | T_1 < t, X(T_1))]$$

$$= \int_0^u \phi_1(u, v) \int_0^{u+c_1v} \phi_2(x, t-v) G(v, dx) dF_{T_1}(v)$$

$$\text{所以, } \phi(u, t) = \phi_1(u, t)(1 - F_{T_1}(t)) + \int_0^u \phi_1(u, v) \int_0^{u+c_1v} \phi_2(x, t-v) G(v, dx) dF_{T_1}(v)$$

3 例子

设 $N_1(t), N_2(t)$ 分别是参数为 λ_1, λ_2 的泊松过程, $Z^{(1)}, Z^{(2)}$ 都服从参数为 β_1 的指数分布, $E[Z^{(1)}] = E[Z^{(2)}] = \beta_1^{-1}$, 易知, $N(t)$ 是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程, 则 Z 也服从参数为 β_1 的指数分布. 设 T_1 服从单点分布, $P(T_1 = a) = 1, a > 0, a$ 是实常数.

$$\Psi_1(u, t) = \frac{\lambda_1}{\beta_1 c_1} \exp[-(\beta_1 - \frac{\lambda_1}{c_2})u] - \exp[-\beta_1 u - (1 + \frac{\beta_1 c_1}{\lambda_1})t] \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\beta_1 u, \lambda_1 t, y) dy \quad (\text{见}[3])(3-10)$$

其中

$$g(\omega, 0, y) = 2 \frac{\sqrt{\frac{\beta_1 c_1}{\lambda_1}} \exp[(2 \sqrt{\frac{\beta_1 c_1}{\lambda_1}} \theta + \omega \sqrt{\frac{\lambda_1}{\beta_1 c_1}}) \cos y]}{1 + \frac{\beta_1 c_1}{\lambda_1} - 2 \sqrt{\frac{\beta_1 c_1}{\lambda_1}} \cos y} (\sin y \sin(y + \omega \sqrt{\frac{\lambda_1}{\beta_1 c_1}} \sin y))$$

$\Psi_2(x, t)$ 的形式类似与 $\Psi_1(u, t)$, 把 (3-10) 式的右边中的 λ_1 改为 $\lambda_1 + \lambda_2$, c_1 改为 $c_1 + c_2$, u 改为 x 即可. 再由 $\phi_1(u, t) = 1 - \Psi_1(u, t), \phi_2(u, t) = 1 - \Psi_2(u, t)$, 即可得到 $\phi_1(u, t), \phi_2(u, t)$.

$\Psi_2(x) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho x}{\mu(1+\rho)}}$ 其中, $\mu = \frac{1}{\beta_1}, \rho = \frac{c_1 + c_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)\mu} - 1$, (见[1]) 指数分布 k 重卷积是 k 阶爱尔兰分布, 由命题 2 知

$$\frac{\partial G(T_1, x)}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 T_1)^k}{k!} e^{-\lambda_1 T_1} \frac{\beta_1^k}{(k-1)!} (u + c_1 T_1 - x)^{k-1} e^{-\beta_1(u + c_1 T_1 - x)}$$

$$\int_0^{u+c_1t} \Psi_2(x) G(t, dx) = \frac{1}{1+\rho} \exp[-\lambda_1 t - \beta_1(u + c_1 t)] [\exp(\frac{\lambda_1 \beta_1 t}{b}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \beta_1 t)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{b^i (u + c_1 t)^i}{i!}]$$

其中 $b = -\frac{\rho}{\mu(1+\rho)} + \beta_1, P(T = a) = 1$, 代入定理 2.3 得:

$$\Psi(u) = \Psi_1(u, a) + \phi_1(u, a) \left\{ \frac{1}{1+\rho} \exp[-\lambda_1 a - \beta_1(u + c_1 a)] \right. \\ \left. \left[\exp(\frac{\lambda_1 \beta_1 a}{b}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \beta_1 a)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{b^i (u + c_1 a)^i}{i!} \right] \right\}$$

把 $\phi_1(u, t), \phi_2(x, t), \frac{\partial G(T_1, x)}{\partial x}, P(T_1 = a) = 1$, 代入定理 2.5 即可得到 $\phi(u, t)$. (下转第 156 页)

均为常数. Geman—El, Karoui—Rochet (1995) 研究了一般利率和常数波动率下的复合期权, 但当利率随机波动、 $S_t^* - X = 0$ 时的公司价值 V^* 却不唯一. 本文得出的复合期权定价公式满足利率和波动率两个变量的随机波动条件, 比 Geske 等人的复合期权定价公式具有更为一般化的意义, 实用性更强.

参考文献:

- [1] Geske, R. The valuation of compound options[J]. Journal of Financial Economics 1979, (7): 63~81.
- [2] Geske, R. Johnson, H. E., The valuation of corporate liabilities as compound options; a correction 1984.
- [3] Brealey, R., Myers, S. C. In: Principles of Corporate Finance. New York, McGraw—Hill 1991.
- [4] Carr, P. The valuation of sequential exchange opportunities. Journal of Finance 1988, (5): 1235—1256.
- [5] Hull, J. Options, Futures, and Other derivatives, 3rd ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1998, 2000.
- [6] 杨春鹏. 实物期权及应用[B]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.
- [7] Geman, H., El Karoui, Rochet, J. C., 1995. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing[J]. Journal of Applied Probability 1995, (32): 443—458.
- [8] Journal of Financial and Quantitative Analysis 19 (2), 231—232.
- [9] Merton, R. C. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics 1973, (4): 141—183.
- [10] Trigeorgis, L. In: Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation[M]. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

The Compound Option Pricing with Stochastic Interest Rate and Volatility

ZHANG Xue-chao, XUAN Guo-liang

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: In the studies of compound option pricing, the defect of Geske (1979) formula is that its assumption, interest rate and volatility is constant. Geman—El, Karoui—Rochet (1995), Hull (1998, 2000), etc. also assume that either interest rate or volatility is constant. In this paper, Geske formula is generalized, its compound option pricing equation with stochastic interest rate and volatility is more practiced.

Key words: compound option; pricing; interest rate; volatility

(上接第 152 页)

参考文献:

- [1] Grandell, J. Aspects of Risk Theory[M]. Springer—verlag, New York, 1991.
- [2] Asmussen. Ruin Probabilities [M]. World Scientific, 2000.
- [3] Thomase Rolksi. et al. Stochastic Processes for Insurance and Finance [M]. John Wiley & Sons Ltd 1999.
- [4] Gerber, H. U 著. 陈世学, 严颖译. 数学风险论导引[M]. 北京: 世界图书出版公司, 1997.

Delayed Double Type-insurance Compound Poisson Risk Model

WANG Xiang

(Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The insurance develops rapidly. The scale of the business expands incessantly. Considering the limitations of univariate risk model, I consider a delay double type-insurance compound Poisson risk model. I give expressions for ruin probability and finite time survival probability.

Key words: finite time ruin probability; ruin probability; survival probability; Poisson processes