文章编号: 1005-0523(2006)04-0153-04

具有随机利率和波动率的复合期权定价

张学超, 宣国良

(上海交通大学 安泰管理学院, 上海 200030)

摘要:在复合期权的定价研究中, Geske(1979)公式的不足之处在于其假设利率和波动率均为常数. Geman—El Karoui—Rochet(1995)、Hull(1998, 2000)等人也是假设波动率或利率之一为常数. 本文对 Geske 公式加以推广, 得出了利率和波动率都随机波动时的复合期权定价公式, 具有更强的实践意义.

关键词:复合期权; 价; 利率; 波动率

中图分类号: F830.91

文献标识码: A

复合期权即是期权的期权, 它暗示了一系列复合(增长)机会的价值, 现已广泛应用于企业投资决策. 许多实物投资, 如研发、战略并购、网络信息技术等, 其决策不仅依据其预期的直接现金流, 而且依据其可能的未来成长机会(如新技术突破与创新、新市场渠道的开辟等); 这类投资不应被视为独立期权, 而应视为前后项目相互关联的复合期权, 前一环节的投资很可能是后一环节的先决条件.

1979年, Geske在Black—Scholes(简称BS公式)的期权定价公式框架下对复合期权的定价进行了研究, 其步骤主要分两步: 首先对标的期权根据BS公式定价; 然后把上一步发现的复合期权作为单一期权进行定价. Geske(1979)之后, Carr(1988)、Brealey和Myers(1991)、Geske和Johnson(1984)、Trigeorgis(1996)等都研究了序列(复合)期权, 包括为获得后序期权的期权, 目的是把标的资产换成其它风险资产. 然而, 包括Geske在内的这些研究都假设波动率和利率为常数; 由于复合期权的序贯性, 其对潜在参数的敏感性大大增加, 因而这些公式和成果很难在实践中应用. 国内外一些学者对此进行了部分修正, 如Hull(1998, 2000)研究了标的资产的波动率为随机情形下的复合期权, 杨春鹏(2002)研究了行权时间为随机形式下的复合期权. 本文将在Geske和Hull的研究基础上, 探讨波动率和利率均为随机情形的复合期权.

假设企业投资机会被视为期权, 标的资产是现有资产的全部价值 V , 股票、但保、可转债等各种有价证券可以或有索取权附加于 V 之上; 标的期权是公司发行的股票, 它是基于公司价值 V 的期权.

1 波动率和利率随机情形下的复合增长期权定价

以 S 表示公司的市场现值, B 表示公司债券面值(纯现金债券, 到期时间为 T 年). 假设公司价值 V 遵循几何布朗运动:

$$\frac{dV}{V} = \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

其中, W_t 为标准维纳过程, $\mu(t)$ 是 t 时刻公司的瞬时期望收益率, $\sigma(t)$ 是 t 时刻公司收益的波动率, $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)$ 都是随时间而变化的.

假设公司股票可视作公司价值的期权, 根据伊藤引理, 股票均衡价格遵循下述偏微分方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = r(t)S - r(t)V \frac{\partial S}{\partial V} - 0.5\sigma^2(t)V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \quad (1)$$

收稿日期: 2006-05-08

作者简介: 张学超(1971-), 男, 汉族, 山东高密人, 上海交通大学博士研究生, 研究方向: 战略投资.

其中, $r(t)$ 表示无风险收益率.

在 T 时刻, 如果公司价值大于债券面值 B , 清算后, 剩余价值将支付给公司股东. 如果公司价值低于债券面值, 则公司股票分文不值. 因而, (1) 式的边界条件为:

$$S_T = \max(V_T - B, 0) \quad (2)$$

根据 Merton(1973) 的研究结果, 在(2)式的约束条件下, (1)式的解为:

$$S(V, t) = VN(K_2(t)) - \exp\left(-\int_t^T r(\tau) d\tau\right) BN(K_1(t)) \quad (3)$$

其中,

$$k_1(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \int_t^T [r(\tau) - 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau\right]}{\left(\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad k_2(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \int_t^T [r(\tau) + 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau\right]}{\left(\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

$N(\bullet)$ 为累积概率分布函数.

下面求股票 S 的欧式增长期权价值 $c \cdot c = f(S, t)$, 行权价格为 X , 到期时间为 t^* ($t^* \leq T$). 由于 S 被视为公司价值的期权, 这种期权应被视作复合期权, 其价值 c 依赖于 V 和 t , 于是有

$$\frac{\partial c}{\partial t} = r(t)c - r(t)V \frac{\partial c}{\partial V} - 0.5\sigma^2(t)V^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V^2} \quad (5)$$

边界条件为: $c_{t^*} = \max(S_{t^*} - X, 0)$ (6)

以 V^* 表示 $S_{t^*} - X = 0$ 时的公司价值, 其中 S_t 由(3)式给出. 当公司价值大于 V^* 时, 期权将被行权; 低于 V^* 时, 不行权. 由于(3)式和(4)式, V^* 是唯一存在的.

定义

$$h_1(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{V^*}\right) + \int_t^{t^*} [r(\tau) - 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau\right]}{\left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad h_2(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{V^*}\right) + \int_t^{t^*} [r(\tau) - 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau\right]}{\left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

为解(5)和(6), 作如下替代:

$$c(V, t) = \exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) \tilde{c}(u, z)$$

其中, $u = -\ln\left(\frac{V}{V^*}\right) - \int_t^{t^*} [r(\tau) - 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau$, $z = \frac{1}{2} \int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau$. 于是, (5)式可转换成 $\partial_z \tilde{c} = \partial_u \tilde{c}$, $c(V, t)$, $c(V, t)$ 可以写成

$$\exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{4\pi z})^{-1} \exp\left(-\frac{(u - \zeta)^2}{4z}\right) \tilde{c}(\zeta, 0) d\zeta \quad (8)$$

将(3)式代入(8)式, 可得:

$$\exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{4\pi z})^{-1} \exp\left(-\frac{(h_1 + \zeta/\sqrt{2z})^2}{2} - \ln(k_2(t^*))\right) d\zeta - B \int_{-\infty}^0 (\sqrt{4\pi z})^{-1} \exp\left(-\frac{(h_1 + \zeta/\sqrt{2z})^2}{2}\right) \exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) N(k_1(t^*)) d\zeta - X \int_{-\infty}^0 (\sqrt{4\pi z})^{-1} \exp\left(-\frac{(h_1 + \zeta/\sqrt{2z})^2}{2}\right) d\zeta \quad (9)$$

(9)式第三项可写成:

$$-X \exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) N(h_1(t)) \quad (10)$$

为了把其它项也写成与 Geske(1979) 相类似的形式, 令

$$\rho(t) = \left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau / \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $x = h_2(t) + \zeta / (\sqrt{2}Z)$, 则(9)式第一项为:

$$\exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) V \int_{-\infty}^{h_2(t)} (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-x^2/2) N((k_2(t) - \rho x) / \sqrt{1 - \rho^2}) dx,$$

第二项可写成:

$$\exp\left(-\int_t^T r(\tau) d\tau\right) V \int_{-\infty}^{h_1(t)} (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-x^2/2) N(k_1(t) - \rho x) / \sqrt{1 - \rho^2} dx,$$

注意到 $\int_{-\infty}^h (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-x^2/2) / N((k(t) - \rho x) / \sqrt{1 - \rho^2}) dx$ 可写成

$$\int_{-\infty}^h \int_{-\infty}^k (2\pi \sqrt{1 - \rho^2})^{-1} \exp(-(x^2 + y^2 - 2\rho xy) / (2 - 2\rho^2)) dx dy$$

最终可得出:

$$c(V, t) = VN(h_2(t), k_2(t); \rho(t)) - B \exp\left(-\int_t^T r(\tau) d\tau\right) N(h_1(t), k_1(t); \rho(t)) - X \exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) N(h_1(t)) \quad (11)$$

其中, h, k 由(7)式给出, k, s 由(4)式给出, ρ 由(10)式给出.

(11)式得出了波动率和利率随机变化的推广 BS 公式. 实际上, 如果 $B=0$, 可得出:

$$c(V, t) = VN(h_2(t)) - X \exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) N(h_1(t))$$

其中,

$$h_1(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right) + \int_t^{t^*} [r(\tau) - 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau\right]}{\left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad h_2(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right) + \int_t^{t^*} [r(\tau) - 0.5\sigma^2(\tau)] d\tau\right]}{\left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}},$$

2 与 Geske(1979)公式的比较

Geske(1979)公式是(11)式在 r 和 σ 为常数时的特例. 计算 C 前, 可以发现 $\partial c / \partial h_1 = 0, \partial c / \partial k_1 = 0, \partial c / \partial \rho = 0$, 由此得到:

$$1、\frac{\partial c}{\partial V} = N(h_1, k_2, \rho) > 0$$

$$2、\frac{\partial c}{\partial B} = -\exp\left(-\int_t^T r(\tau) d\tau\right) N(h_1, k_1, \rho) < 0$$

$$3、\frac{\partial c}{\partial X} = -\exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) N(h_1) < 0$$

$$4、\frac{\partial c}{\partial T} = B \exp\left(-\int_t^T r(\tau) d\tau\right) \left\{ N\left(\frac{h_1 - \rho k_1}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) N'(k_1) \sigma^2(T) (2 \sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau}) + N(h_1, k_1, \rho) r(T) \right\} > 0$$

$$5、\frac{\partial c}{\partial t^*} = X r(t^*) \exp\left(-\int_t^{t^*} r(\tau) d\tau\right) N(h_1) + N\left(\frac{h_2 - \rho k_2}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) N(h_2) \sigma^2(t^*) / 2 \sqrt{\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau}$$

1式表明, 期权价值随公司价值的增加而增加. 由2式, 由于公司总资产等于负债和权益之和, 债券面值的上升导致公司期权价值的下降. 由3式, 期权价值随行权价格的上升而下降. 4式表明, 债券到期时间越长, 债券价值的现值越低, 因而期权价值越大.

3 与 Geman - El, Karoui - Rochet 公式的比较

Geman - El, Karoui - Rochet(1995)用一个变换公式, 用一般化利率和常数波动率直观地表达了复合期权, 即

$$c(V, 0) = VN(h_1 + \sigma \sqrt{t^*}, k_1 + \sigma \sqrt{T}, \rho) - B \beta_T(0) N(h_1, k_1, \rho) - x \beta_{t^*}(0) N(h_1) \quad (12)$$

其中, $h_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{t^*}} \left(\ln \frac{V}{V^* \beta_{t^*}(0)} - \frac{\sigma^2 t^*}{2} \right), k_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln \frac{V}{B \beta_T(0)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \right), \rho = \sqrt{\frac{t^*}{T}}, \beta_s(t)$, 表示 t 时刻、到期时间为 s 的债券

价格. 如果 $\beta_s(t) = \exp\left(-\int_t^s r(\tau) d\tau\right)$ 且波动率为常数, 则(11)式和(12)式是一致的.

如果对 Geman(1995)公式进行扩展, 即令 σ 随时间变化, 将得到如下表达式:

$$c(V, t) = VN(h_2(t), k_2(t); \rho(t)) - B \beta_T(t) N(h_1(t), k_1(t); \rho(t)) - X \exp \beta_{t^*}(t) N(h_1(t))$$

其中,

$$h_1(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{V^* \beta_{t^*}(t)}\right) - \frac{1}{2} \int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right]}{\left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad h_2(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{V^* \beta_{t^*}(t)}\right) + \frac{1}{2} \int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right]}{\left(\int_t^{t^*} \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$k_1(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{B \beta_T(t)}\right) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right]}{\left(\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad k_2(t) = \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{B \beta_T(t)}\right) + \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right]}{\left(\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}$$

但是, 如果假设利率随机变化, V^* 将不一定唯一, 因而该式在更一般化的情况下几乎无法应用, 这正是其缺陷之所在.

4 小结

均为常数. Geman—El, Karoui—Rochet (1995) 研究了一般利率和常数波动率下的复合期权, 但当利率随机波动、 $S_t^* - X = 0$ 时的公司价值 V^* 却不唯一. 本文得出的复合期权定价公式满足利率和波动率两个变量的随机波动条件, 比 Geske 等人的复合期权定价公式具有更为一般化的意义, 实用性更强.

参考文献:

- [1] Geske, R. The valuation of compound options[J]. Journal of Financial Economics 1979, (7): 63~81.
- [2] Geske, R. Johnson, H. E., The valuation of corporate liabilities as compound options; a correction 1984.
- [3] Brealey, R., Myers, S. C. In: Principles of Corporate Finance. New York, McGraw—Hill 1991.
- [4] Carr, P. The valuation of sequential exchange opportunities. Journal of Finance 1988, (5): 1235—1256.
- [5] Hull, J. Options, Futures, and Other derivatives, 3rd ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1998, 2000.
- [6] 杨春鹏. 实物期权及应用[B]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.
- [7] Geman, H., El Karoui, Rochet, J. C., 1995. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing[J]. Journal of Applied Probability 1995, (32): 443—458.
- [8] Journal of Financial and Quantitative Analysis 19 (2), 231—232.
- [9] Merton, R. C. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics 1973, (4): 141—183.
- [10] Trigeorgis, L. In: Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation[M]. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

The Compound Option Pricing with Stochastic Interest Rate and Volatility

ZHANG Xue-chao, XUAN Guo-liang

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: In the studies of compound option pricing, the defect of Geske (1979) formula is that its assumption, interest rate and volatility is constant. Geman—El, Karoui—Rochet (1995), Hull (1998, 2000), etc. also assume that either interest rate or volatility is constant. In this paper, Geske formula is generalized, its compound option pricing equation with stochastic interest rate and volatility is more practiced.

Key words: compound option; pricing; interest rate; volatility

(上接第 152 页)

参考文献:

- [1] Grandell, J. Aspects of Risk Theory[M]. Springer—verlag, New York, 1991.
- [2] Asmussen. Ruin Probabilities [M]. World Scientific, 2000.
- [3] Thomase Rolksi. et al. Stochastic Processes for Insurance and Finance [M]. John Wiley & Sons Ltd 1999.
- [4] Gerber, H. U 著. 陈世学, 严颖译. 数学风险论导引[M]. 北京: 世界图书出版公司, 1997.

Delayed Double Type-insurance Compound Poisson Risk Model

WANG Xiang

(Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The insurance develops rapidly. The scale of the business expands incessantly. Considering the limitations of univariate risk model, I consider a delay double type-insurance compound Poisson risk model. I give expressions for ruin probability and finite time survival probability.

Key words: finite time ruin probability; ruin probability; survival probability; Poisson processes