文章编号:1005-0523(2006)05-0128-02

# A·Kotzig关于自补图的一个问题

周尚超

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

**摘要**:A·Kotzig提出这样一个问题:对于任意正则自补图 $G$,是否存在 $G$ 的一个自补置换 $s$,$s$ 是 $\{1,4,4,...,4\}$ 型,定理1否定地回答了这个问题.

**关 键 词**:图论;自补图;自补置换

**中图分类号**:O157.5 **文献标识码**:A

设G是无向简单图,V(G),E(G),C(G)分别是G的顶点集,边集和补图.若G是自补图,s是G到C(G)的同构映射,则称s是G的自补置换.设Aut$(G)$和 $P(G)$是分别是 $G$ 的自同构群和 $G$ 的所有自补置换的集合.将 $s$ 记为不交的轮换的积,若 $s$ 的轮换的长为 $m_1,m_2,...,m_n$.则称 $s$ 是$[m_1,m_2,...,m_n]$型.设s,t,x是自补图G的3个自补置换.$[u,v]\in E(G)\to s[u,v]=[s(u),s(v)]\in C(G)$

$\to ts[u,v]=[ts(u),ts(v)]\in E(G)\to xts[u,v]=[xts(u),xts(v)]\in C(G)$. 由此得引理1.

**引理1** 设 $G$ 是自补图,则 $G$ 的奇数个自补置换之积是 $G$ 的自补置换,$G$ 的偶数个自补置换之积是 $G$ 的自同构,$G$ 的自同构与自补置换之积是自补置换.

定义循环图如下:$V(G)=\{0,1,2,...,m-1\}$,$V(G)$上的运算按模 $m$ 运行.设 $A$ 是$\{1,2,...,m-1\}$的子集且 $-A=\{-a|a\in A\}=A$. $[i,j]\in E(G)$,当且仅当 $i-j\in A$.记 $G=C_m<A>$. $G$ 是$|A|$度正则图.令 $x=(0,1,2,...,m-1)$,则 $x$ 是 $G$ 的自同构,$x\in \mathrm{Aut}(G)$.$\mathrm{Aut}(G)$是可迁群,$|\mathrm{Aut}(G)|=m|F|$.这里 $F=\{s|s\in Aut(G),s(0)=0\}$.例如:$m=17$, $A=\{1,2,4,8,16,15,13,9\}$,则 $A=-A$.

设 $G_1=C_m<A>$, $G_2=C_m<B>$.若 $r$ 与 $m$ 互素且 $rA=\{ra|a\in A\}=B$,则 $G_1$ 与 $G_2$ 同构,$i\to ri$ 是 $G_1$ 到 $G_2$ 的同构映射:$[i,j]\in E(G_1)\longleftrightarrow i-j\in A\longleftrightarrow r(i-j)=ri-rj\in B\longleftrightarrow[ri,rj]\in E(G_2)$.若 $A\cup B=\{1,2,...,m-1\}$, $A\cap B=$空集,则 $C_m<A>$是 $C_m<B>$的补图.

**引理2** 设 $G$ 是自补图,则$|\mathrm{Aut}(G)|=|P(G)|$

**证明** 设 $P(G)=\{s_1,s_2,...,s_n\}$,则$\{s_1s_i,s_2s_i,...,s_ns_i\}$ 是 $G$ 的自同构,$|P(G)|\leqslant|\mathrm{Aut}(G)|$,设 $\mathrm{Aut}(G)=\{s_1,s_2,...,s_n\}$,

$x$ 是 $G$ 的自补置换,则$\{xs_1,xs_2,...,xs_n\}\in P(G)$,$|Aut(G)|\leqslant|P(G)|$

**定理1** 设 $G=C_{17}<A>$, $H=C_{17}<B>$,

其中 $A=\{1,2,4,8,16,15,13,9\}$, $B=\{3,6,12,7,14,11,5,10\}$,

设映射 $s$ 为:$i\to 3i$,即 $s=(0)(1,3,9,10,13,5,15,11,16,14,8,7,4,12,2,6)$,设 $x=(0,1,2,...,16)$,则有

1) $G$ 是正则自补图,$H=C(G)$

2) $P(G)=\{x^{-j}s^{2i+1}x^j|i=0,1,2...,7;j=0,1,2,...,16\}$;

3) $P(G)$中任意元是$\{1,16\}$型且$|P(G)|=136$;

**收稿日期**:2006-01-24

**基金项目**:江西省自然科学基金资助(0511016)和国家自然科学基金资助(10661007)

**作者简介**:周尚超(1948-),男,云南蒙自人,教授.

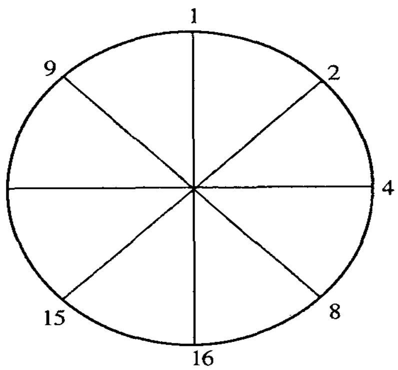


图 1 A

**证明**　$A\cup B=\{1,2,...,16\}$, $A\cap B=$空集合$\rightarrow C(G)=H$;$3A=B\rightarrow G$ 与 $C(G)=H$ 同构, $G$ 是自补图, $s\in P(G)$. 由引理 1, $s^{2i+1}\in P(G)$, $i=0,1,2,...,7$, $s^{2i+1}$是$\{1,16\}$型. $x\in Aut(G)\rightarrow x^{-j}s^{2i+1}\in P(G)$. 根据群论 $x^{-j}s^{2i+1}x^j$ 是与$s^{2i+1}$共轭的置换 它们的型相同 $x^{-j}s^{2i+1}x^j=(x^{-j}sx^j)^{2i+1}=(j)(1+j,3+j,9+j,10+j,13+j,5+j,15+j,11+j,16+j,14+j,8+j,7+j,4+j,12+j,2+j,6+j)^{2i+1}$, $j=0,1,2,...,16$, 这是 136 个不同的置换. $P(G)>=136$;以下只要再证明$|Aut(G)|=17F=136$;这里 $F=\{b|b\in Aut(G),b[0]=0\}$

$s\in P(G)\rightarrow s^2=d=(0)(1,9,13,15,16,8,4,2)(3,10,5,11,14,7,12,6)\in F$. $G$ 的以$A(B)$为顶点集的导出子图仍用 $A(B)$表示,(图 1 给出 $A$). $A$ 与 $C_8\langle A_1\rangle$同构,这里 $A_1=\{1,4,7\}$. $s_1=(1,9,13,15,16,8,4,2)\in Aut(A)$, $t_1=(1)(2,9)(4,13)(8,15)(16)\in Aut(A)$. 孙良证明了 3 度正则连通 $m$ 阶($m>=8$)循环图的自同构群是二面体群. 因此 $Aut(A)=\langle s_1,t_1\rangle$(由 $s_2,t_1$ 生成的群). 设 $i\in A$. 与 $i$ 邻接的 $B$ 中的顶点集用 $B_i$ 表示. $B_2=\{6,3,10,11\}$, $B_1=\{3,10,5,14\}$, $B_9=\{10,5,11,7\}$ $B_{13}=\{5,11,14,12\}$, $B_{16}=\{14,7,12,3\}$, 0 与 $A$ 中任意点邻接, 0 与 $B$ 中点不邻接. 故对任意 $b\in F$, 有 $b=(0)b_1b_2$. 其中 $b_1\in Aut(A)$, $b_2\in Aut(B)$. 设 $b\in F$. 对 $i\in A$, $k\in B_i$, 若 $b(i)=j$, 则 $b(B_i)=B_j$, $b(k)\in B_j$.

$Aut(A)$是 16 阶可迁群, $Aut(A)$中使 1 不变的元素只有 $t_1$ 和 $e_1$($Aut(A)$的单位元). 设 $b(1)=1$, 则 $b_1\in\{t_1,e_1\}$, $b(16)=b_1(16)=16$, $b(B_1)=B_1$, $b(B_{16})=B_{16}$. $3\in B_1\cap B_{16}\rightarrow b(3)\in B_1\cap B_{16}=\{3,14\}$. 若 $b(2)=b_1(2)=9$, 则 $b(B_2)=B_9$. $3\in B_2\rightarrow b(3)\in B_9$. 但 $B_1\cap\{3,14\}=$空集, 因此 $b_1(2)!=9$, $b_1=e_1$. $b_1=e_1\rightarrow$对任意 $i\in A$, $b(i)=i$, $b(B_i)=B_i\rightarrow$对 $j\in B_i$, $b(j)\in B_i$. $3\in B_2\cap B_{16}\rightarrow b(3)=3$; $t\in B_9\cap B_{16}->b(7)\in B_9\cap B_{16}->b(7)=7$; $11\in B_2\cap B_{13}\rightarrow b(11)\in B_2\cap B_{13}\rightarrow b(11)=11$; $10\in B_1\cap B_2\cap B_9$

$\rightarrow b(10)\in B_1\cap B_2\cap B_9\rightarrow b(10)=10$ . $6\in B_2\rightarrow b(6)\in B_2=\{6,3,10,11\}$, 由于 $b(i)=i$, $i=3,10,11$, 故 $b(6)=6$;同理有 $b(5)=5$, $b(14)=14$, $b(12)=12$. 这就证明了:$b(1)=1$ 可推出 $b=e$($F$ 的单位元). 若 $b(1)=a$, 则存在 $j$, 使 $d^j(a)=1$. $d^jb(1)=1\rightarrow d^jb=e$, $b=d-j\in\langle d\rangle$(由 $d$ 生成的群), $F$ 中任意元 $b\in\langle d\rangle$, 因此 $F=\langle d\rangle$是 8 阶群, $|Aut(G)|=136$.

## 参考文献:

[1] Bondy. J. A., and Mutty. U. S. R., Graph Theory Related Topics[M]. Academic Press. New York and London. 1979

[2] 孙　良. 循环图的自同构群[J]. 北京工业学院学报, 1988 (1):1-5.

# A Problem Concerning the Self-Complementary Graphs by A·Kotzig

ZHOU Shang-chao

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract**: A·Kotzig[1] presented the following problem: "Is it true that, for every regular self-complementary graph G, there is at least one isomorphism permutation p such that, except for the cycle of length one, every cycle of p is of length exactly four?". we construct a counterexample to show the answer is negative.

**Key words**: graph theory; self—complementary graph