文章编号:1005－0523(2006)05－0133－03

关于 $P_m \vee S_n$ 的邻点可区别全染色

唐国梅,马　刚,马少仙

(西北民族大学 计算机科学与信息工程学院,甘肃 兰州 730030)

摘要:对一个正常的全染色满足相邻点的点及其关联边染色的色集不同时,称为邻点可区别全染色,其所用最少染色数称为邻点可区别全色数.本文得到了路 P_m 与星 S_n 的联图 $P_m \vee S_n$ 的邻点可区别全色数.

关 键 词:路;星;联图;邻点可区别全色数

中图分类号:O157.5　　**文献标识码:**A

1　引言

具有重要的实际意义和理论意义的图的染色问题,是图论研究的主要内容之一,图的染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数.已经公认,确定图的有关色数是一个十分困难的问题.张忠辅等人最近提出了图的邻强边染色[1,2]和邻点可区别全染色这[3,4]两个新的染色概念,得到了若干结果,并提出了有关猜想.目前所知结果甚少,尚有许多未解决的问题.本文给出了路 P_m 与 S_n 星的联图的邻点可区别全色数.文中未加述及的术语、记号可参见[6－8].

2　相关定义及引理

定义 1[3]　对 $|V(G)|\geq 2$ 的连通图 $G(V,E)$ 的映射 $f:\{V,E\}\xrightarrow{f}\{1,2,...,k\}$,若满足下列条件:

1) $\forall$ u, v $\in V$, $uv \in E$, 且 $u\neq v$, 有 $f(u)\neq f(v)$;

2) $\forall$ uv, vw $\in E$, $v\neq w$, 有 $f(uv)\neq f(uw)$;

3) $\forall$ u, v $\in V$, $uv\in E$, 且 $u\neq v$, 有 $f(u)\neq f(uv)$, $f(v)\neq f(uv)$;

4) $\forall$ u, v $\in V$, $uv \in E$, 且 $u\neq v$, 有 $C(u)\neq C(v)$.

则称 f 为 G 的一个 k－邻点可区别全染色法,简记作 k－AVDTC of G.而 $\chi_{at}(G)=\min\{k\mid$ k－AVDTC of G $\}$称为 G 的邻点可区别全色数.其中:

$C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)\mid uv\in E(G), v\in V(G)\}$, $u\in V(G)$

称为点 u 在 f 下的色集.$C(u)$在全体颜色的集合 $C=\{1,2,...,k\}$中的补集记为 $\bar{C}(u)=C\setminus C(u)$.

显然有 $\chi_{at}(G)\geq\Delta(G)+1$,其中 $\Delta(G)$表示 G 的最大度数.

猜想[3]　对于简单图 G,有 $\chi_{at}(G)\leq\Delta(G)+3$.

定义 2[5]　设图 G 与 H 有:$V(G)\cap V(H)=\varnothing$;$E(G)\cap E(H)=\varnothing$.若 $G\vee H$ 满足:

$V(G\vee H)=V(G)\cup V(H)$;$E(G\vee H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv\mid u\in V(G), v\in V(H)\}$则称 $G\vee H$ 为 G 与 H 的联图.

引理 1[3]　对 $n\geq 2$ 的 n 阶完全图 K_n,有 $\chi_{at}(K_n)=\begin{cases} n+1, & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2);\\ n+2, & n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$

引理 2[3]　对 $|V(G)|\geq 2$ 的连通图 G,若有最大度点相邻,则有 $\chi_{at}(G)\geq\Delta(G)+2$.

引理 3[3]　对于 $e\in E(K_{2n-1})$, $(n\geq 1)$,有 χ_{at}

收稿日期:2006－01－24

基金项目:国家民委科研项目(No.05XB07)

作者简介:唐国梅(1979－),女,东乡族,甘肃兰州人,助教,在读硕士研究生,从事应用数学、图论的研究.

$$(K_{2n+1}-e)=\begin{cases}3,\ n=1;\\ 2n+2,\ n=2,3,4;\\ 2n+3,\ n\geq 5.\end{cases}$$

3　主要结论及其证明

在以下讨论中，记 m 阶路 $P_m=u_1u_2\cdots u_m$. 记 $n+1$ 阶星 S_n 为：$V(S_n)=\{v_i\mid i=0,1,2,\cdots,n\}$；$E(S_n)=\{v_0v_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$. 由定义 2，有如下引理.

引理 4　对 $P_m\vee S_n$，有 $\Delta(P_m\vee S_n)=m+n$.

定理 1　当 $m=1$ 时，对 $P_1\vee S_n$ 有 $\chi_{at}(P_1\vee S_n)=\begin{cases}5,\ n=1;\\ n+3,\ n\geq 2.\end{cases}$

证明　当 $n=1$ 时，易见 $P_1\vee S_n=K_3$，由引理 1 知 $\chi_{at}(P_1\vee S_1)=5$，所以此时结论为真.

当 $n\geq 2$ 时，由引理 2、引理 4 知 $\chi_{at}(P_1\vee S_n)\geq n+3$. 为了证明结论为真，仅需给出 $P_1\vee S_n$ 的一个 $(n+3)-$AVDTC 法. 设 $C=\{1,2,\cdots,n+3\}$，令 f 为：

$f(v_0v_i)=i,\ i=1,2,\cdots,n$；$f(u_1v_0)=n+2$；$f(u_1v_i)=i+1,\ i=1,2,\cdots,n$；

$f(v_0)=n+3$；$f(u_1)=1$，$f(v_i)=i+2,\ i=1,2,\cdots,n$.

对此 f，显然有：$\bar{C}(v_0)=\{n+1\}$；$C(u_1)=\{n+3\}$；$C(v_i)=\{i,i+1,i+2\},\ i=1,2,\cdots,n$. 所以 f 是 $P_1\vee S_n$ 的 $(n+3)-$AVDTC 法. 从而定理 1 为真.

定理 2　当 $m=2$ 时，对 $P_2\vee S_n$ 有

$$\chi_{at}(P_2\vee S_n)=n+4.$$

证明　当 $n=1$ 时，易见 $P_2\vee S_1=K_4$，由引理 1 知 $\chi_{at}(P_2\vee S_1)=5$，所以此时结论为真.

当 $n\geq 2$ 时，由引理 2、引理 4 知 $\chi_{at}(P_2\vee S_n)\geq n+4$. 为了证明结论为真，仅需给出 $P_2\vee S_n$ 的一个 $(n+4)-$AVDTC 法. 设 $C=\{1,2,\cdots,n+4\}$，令 f 为：

$f(v_0v_i)=i,\ i=1,2,\cdots,n$；$f(u_iv_j)=i+j,\ i=1,2,\ j=1,2,\cdots,n$；

$f(u_1v_0)=n+2$；$f(u_2v_0)=n+3$；$f(u_1u_2)=f(v_0)=n+4$；

$f(u_1)=1$；$f(u_2)=2$；$f(v_i)=i+3,\ i=1,2,\cdots,n$.

对此 f，显然有：$\bar{C}(v_0)=\{n+1\}$；$\bar{C}(u_1)=\{n+3\}$；$\bar{C}(u_2)=\{1\}$；$C(v_i)=\{i,i+1,i+2,i+3\},\ i=1,2,\cdots,n$. 所以 f 是 $P_2\vee S_n$ 的 $(n+4)-$AVDTC 法. 从而定理 2 为真.

定理 3　当 $m=3$ 时，对 $P_3\vee S_n$ 有 $\chi_{at}(P_3\vee S_n)=n+5$.

证明　当 $n=1$ 时，有 $P_3\vee S_1=K_5-e$，其中 $(e\in K_5)\ e=u_1u_3\notin E(P_3\vee S_1)$. 由引理 3 知 $\chi_{at}(P_3\vee S_1)=6$，所以此时结论为真.

当 $n\geq 2$ 时，由引理 2、引理 4 知 $\chi_{at}(P_3\vee S_n)\geq n+5$. 为了证明结论为真，仅需给出 $P_3\vee S_n$ 的一个 $(n+5)-$AVDTC 法. 设 $C=\{1,2,\cdots,n+5\}$，令 f 为：

$f(u_iv_j)=i+j,\ i=1,2,3,\ j=0,1,2,\cdots,n$；$f(u_1u_2)=n+4$；$f(u_2u_3)=1$；

$f(v_0v_i)=i+4,\ i=1,2,\cdots,n$；$f(u_i)=n+1+i,\ i=1,2,3$；$f(v_0)=n+5$；

$f(v_i)=i,\ i=1,2,\cdots,n$.

对此 f，有：$\bar{C}(v_0)=\{4\}$；$\bar{C}(u_2)=\{n+5\}$；$\bar{C}(u_1)=\{n+3,n+5\}$；$\bar{C}(u_3)=\{2,n+5\}$；$C(v_i)=\{i,i+1,i+2,i+3,i+4\},\ i=1,2,\cdots,n$. 特别，当 $n=2$ 时有：$\bar{C}(u_1)=\{5,7\}$；$\bar{C}(u_3)=\{2,7\}$；$\bar{C}(v_1)=\{6,7\}$；$\bar{C}(v_2)=\{1,7\}$. 由此可见，f 是 $P_3\vee S_n$ 的 $(n+5)-$AVDTC 法. 从而定理 3 为真.

定理 4　当 $m\geq 4$ 时，对 $P_m\vee S_n$ 有 $\chi_{at}(P_m\vee S_n)=\begin{cases}m+3,\ n=1;\\ m+n+1,\ n\geq 2.\end{cases}$

证明　以下分两种情形对本定理予以证明.

情况 1　若 $n=1$. 由引理 2、引理 4 知 $\chi_{at}(P_m\vee S_n)\geq m+3$，为了证明结论为真，仅需给出 $P_m\vee S_1$ 的一个 $(m+3)-$AVDTC 法. 设 $C=\{1,2,\cdots,m+3\}$，令 f 为：

$f(u_iv_j)=i+j,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=0,1$；$f(u_iu_{i+1})=i+3,\ i=1,2,\cdots,m-1$；

$f(v_0v_1)=m+2$；$f(v_0)=m+1$；$f(v_1)=m+3$；$f(u_1)=3$；

$f(u_i)=i-1,\ i=2,3,\cdots,m$.

对此 f，显然有 $\bar{C}(v_0)=\{m+3\}$；$\bar{C}(v_1)=\{1\}$；$C(u_m)=\{m-1,m+1,m+2\}$；$C(u_1)=\{1,2,3,4\}$；$C(u_i)=\{i-1,i,i+1,i+2,i+3\},\ i=2,3,\cdots,m-1$. 所以 f 是 $P_m\vee S_1$ 的 $(m+3)-$AVDTC 法.

情况 2　若 $n\geq 2$. 显而易见此时 $P_m\vee S_n$ 仅有唯一最大度点 v_0，从而由定义 1 和引理 4 知 $\chi_{at}(P_m\vee S_n)\geq m+n+1$，为了证明结论为真，仅需给出 $P_m\vee S_n$ 的一个 $(m+n+1)-$AVDTC 法. 设 $C=\{1,2,\cdots,m+n+1\}$，令 f 为：

$f(u_iv_j)=i+j$, $i=1,2,\cdots,m-1$, $j=0,1,2,\cdots,n$; $f(u_mv_0)=m$;

$f(u_mv_j)=m+1+j$, $j=1,2,\cdots,n$; $f(v_0v_j)=m+j$, $j=1,2,\cdots,n$;

$f(u_1u_2)=m+n$; $f(u_2u_3)=f(v_0)=m+n+1$; $f(u_iu_{i+1})=i-2$, $i=3,4,\cdots,m-1$;

$f(u_1)=n+2$; $f(u_2)=n+3$; $f(u_i)=i-1$, $i=3,4,\cdots,m$; $f(v_j)=1$, $j=1,2,\cdots,n$.

对此 f，有：$\bar{C}(v_0)=\varnothing$(空集)；$C(v_j)=\{1,j+1,j+2,\cdots,j+m+1\}$, $j=1,2,\cdots,n$; $C(u_1)=\{1,2,\cdots,n+2,m+n+1\}$; $C(u_m)=\{m-3,m-1,m\}\cup\{m+2,m+3,\cdots,m+n+1\}$; $C(u_2)-\{2,3,\cdots,n+3\}\cup\{m+n,m+n+1\}$; $C(u_3)=\{1,2,\cdots,n+3,m+n+1\}$; $C(u_i)=\{i-3,i-2,\cdots,i+n\}$, $i=4,5,\cdots,m-1$, $(m\geq 5)$. 显然有：$C(u_i)\neq C(u_{i+1})$, $i=2,3,\cdots,m-2$. 特别，当 $m=n+2$ 时有：$C(u_i)\neq C(v_j)$, $i=2,3,\cdots,m-1$, $j=1,2,\cdots,n$; 当 $m=n+1$ 时有：$C(u_i)\neq C(v_j)$, $i=1,m$, $j=1,2,\cdots,n$. 由此可见，f 是 $P_m\vee S_n$ 的 $(m+n+1)$-AVDTC 法.

综合以上情况，定理 4 为真.

由引理 4 和定理 1—4 可得定理 5 如下.

定理 5 对 $P_m\vee S_n$ 有 $\chi_{at}(P_m\vee S_n)=$

$$\begin{cases}\Delta+1, & m\geq 4,\ n\geq 2;\\ \Delta+3, & m=n=1;\\ \Delta+2, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

参考文献：

[1] Zhang Zhongfu, Liu Linzhong, Wang Jianfang. Adjacent Strong Edge Coloring of Graphs [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623—626.

[2] 马 刚，马 明，张忠辅. 皇冠图 Gm,n 的邻点可区别边色数[J]. 华东交通大学学报(自然科学版), 2005, 22(2): 141—143.

[3] 张忠辅，陈祥恩，李敬文，等. 关于图的邻点可区别全染色[J]. 中国科学，A 辑，数学，2004, 34(5): 574—583.

[4] 马 刚，张忠辅. 图 Cm∨Fn 的邻点可区别全染色[J]. 西北民族大学学报(自然科学版), 2005, 26(2): 24—29.

[5] J A. Bondy and U S R. Murty. Graph Theory with Application [M]. The Macmillan Press LTD, 1976.

[6] 田 丰，马仲番. 图与网络流理论[M]. 北京：科学出版社，1987.

[7] H P. Yap. Total Colorings of Graphs [M]. Berlin: Lecture Notes in Mathematics, 1623, Springer, 1996.

[8] 张忠辅，王建方. 关于图的全着色——一个综述[J]. 数学进展，1992, 21(4): 390—397.

On Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring of $P_m \vee S_n$

TANG Guo-mei, MA Gang, MA Shao-xian

(The College of Computer Science and Information Engineering, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030, China)

Abstract: A total-coloring is called adjacent vertex-distinguishing if every two adjacent vertices are incident to different sets of colored vertex and incident edge with vertex. The minimum number of colors required for an adjacent vertex-distinguishing proper total-coloring, a simple graph G is denoted by $\chi_{at}(G)$. In this paper, we obtain the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of $P_m \vee S_n$.

Key words: path; star; join-graph; adjacent vertex distinguishing total chromatic number