

文章编号:1005-0523(2006)05-0136-03

关于投射半模

屈 聪,王颂生,张 伟

(江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330027)

摘要:第一部分在[3]中张量积的定义下证明了投射半模的张量积仍是投射的;第二部分在文献[4]正合列的定义下建立了投射半模与函子正合列的等价条件.

关 键 词:张量积,投射半模,正合列

中图分类号:O153.3

文献标识码:A

0 引言

半环是常见的代数结构之一,该概念提出以来有100多年的历史,在国内外数学工作者的努力下,半环理论及应用有了长足的发展.确立自己的地位,如在拓扑学,组合学,计算机科学等都有应用.半环是介于半群和环之间的代数结构,可视为环的推广,像在环论中用环上模研究环一样,利用半环上半模研究半环是行之有效的方法,同样像研究环上模一样,用同调代数的方法研究半模近期也越来越受到重视.本文即用此方法研究投射半模,希望得到环上模相应的结论.

本文中半环 R 及左 R -半模均采用[1]中的定义,张量积指的是[3]中的定义.

1 投射半模的张量积

定义 1.1 设 M, N, P 是左 R -半模,若对任意左 R -半模满同态 $g \in \text{Hom}_R(M, N)$ 以及任意同态 $\gamma \in \text{Hom}_R(P, N)$,都有 $\bar{\gamma} \in \text{Hom}_R(P, M)$,使 $\gamma = \bar{g}\bar{\gamma}$,则称为 P 是弱投射左 R -半模.

定义 1.2 若左 R -半模是 P 弱投射的并且满足如下条件:

如果 $g: M \rightarrow N$ 是一个稳定左 R -半模同态且如果 $\alpha, \bar{\alpha}: P \rightarrow M$ 是 R -半模同态满足 $g\alpha = \bar{g}\bar{\alpha}$,那么存在左 R -半模同态 $\beta, \bar{\beta}: P \rightarrow M$ 使 $g\beta = \bar{g}\bar{\beta}$ 且 $\alpha + \beta = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$,则称 P 是投射左 R -半模.

定义 1.3 左 R -半模 N 是左 R -半模 M 的收缩 $\Leftrightarrow$ 存在一个满左 R -半模同态 $\phi: M \rightarrow N$ 和一个左 R -半模同态 $\varphi: N \rightarrow M$,使 $\phi\varphi = I_n$.

命题 1.4 R 是半环,则下列条件等价:

(1) P 是投射的左 R -半模;(2) P 是弱投射左 R -半模;(3) P 是一个自由左 R -半模的收缩.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2)在[2]中已经证明了“一个半模 P 是投射的 $\Leftrightarrow P$ 是弱投射的.”

(1) $\Leftrightarrow$ (3)在[1]中已有证明.

有了命题1.4,在后面的讨论中,我们对投射和弱投射不加区别.

定理 1.5 (I) R 为交换半环, P_1, P_2 是投射左 R -半模,则 $P_1 \otimes P_2$ 为左投射 R -半模;

(II) R, S 为任意环, P_1 是投射左 S -半模且 P_1 是左 S -右 R -半模, P_2 是投射左 R -半模,则 $P_1 \otimes P_2$ 是投射的左 R -半模.

证明 (I) P_1, P_2 是投射左 R -半模,则存在自由左 R -半模 M, N ,使 P_1 是 M 的收缩, P_2 是 N 的收缩,其关系如下

$$P_1 \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{\alpha} P_1 \text{ 满足 } \alpha\delta = I_{P_1}, \alpha \text{ 为满同态;}$$

收稿日期:2006-01-24

作者简介:屈聪(1981-),女,河南南阳人,在读硕士,从事半环半模研究.

$P_2 \xrightarrow{\rho} N \xrightarrow{\beta} P_2$ 满足 $\beta \circ \rho = I_{P_2}$, β 为满同态;

由张量积的定义如图 1 中的(1)(2)均可换,因 α, β 为满同态,知 $\alpha \otimes \beta$ 为满同态, $\forall (p_1 \otimes p_2) \in P_1 \otimes P_2$, 有

$(\alpha \otimes \beta)(\delta \otimes \rho)(p_1 \otimes p_2) = (\alpha \otimes \beta)(\delta(p_1) \otimes \rho(p_2)) = \alpha \delta(p_1) \otimes \beta \rho(p_2) = p_1 \otimes p_2$, 即有 $(\alpha \otimes \beta)(\delta \otimes \rho) = I_{P_1 \otimes P_2}$. 所以 $P_1 \otimes P_2$ 是 $M \otimes N$ 的收缩.

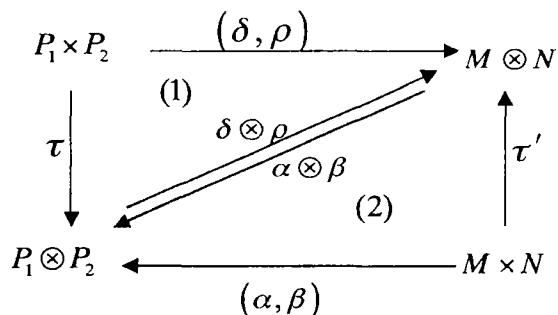


图 1

设 M, N 的基分别是 $\{e_i | i \in I\}, \{f_j | j \in J\}$, 则 $M \otimes N$ 是以 $\{e_i \otimes f_j | i \in I, j \in J\}$ 为基的自由左 R -半模, 知 $M \otimes N$ 是自由的, 所以 $P_1 \otimes P_2$ 是投射的.

(II) 对 P_1, P_2 , 存在自由半模 M_R, N_R , 它们满足 (I) 中的关系,

与 (I) 类似可证左 S -半模 $P_1 \otimes P_2$ 是自由左 S -半模 $M \otimes N$ 的收缩, 所以是投射的.

2 投射半模的刻画

定义 2.1 称左 R -半模序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 在 B 处正合, 如果满足 $\rho_{\ker g} = \text{Im } f$;

设左 R -半模序列 $\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots$ 处处正合, 则称为左 R -半模正合列; 正合列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, 若 g 为满同态, 称之为短正合列. 其中 $\rho_{\ker g} = \{(a, b) | g(a) = g(b), a, b \in B\}; \text{Im } f = \{(b_1, b_2) | \exists a_1, a_2 \in A, b_1 + f(a_1) = b_2 + f(a_2)\}$

定义 2.2 左 R -半模的 N 称为 M 的子可减子半模当且仅当 $m + m' \in N$ 且 $m \in N$, 一定有 $m' \in N$; 态射 $f: N \rightarrow M$ 称为子可减的若 $f(N)$ 是 M 的子可减子半模.

引理 2.3 R 是半环, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 左 R -半模序列, 那么它是正合的 $\Leftrightarrow$ 存在以下交换图使每个

含 0 的序列都是正合的且 β 是子可减的.

证明 " $\Leftarrow$ " 若 $(b_1, b_2) \in \rho_{\ker g}$, 即有 $g(b_1) = g(b_2)$, 由图 2 之(1)可交换, 则有 $\alpha \pi(b_1) = \alpha \pi(b_2)$ 由 $0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} C$ 正合知 α 为单同态, $\therefore \pi(b_1) = \pi(b_2)$

又由 $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ 正合, 知 $\exists k_1, k_2 \in K$, 使

$i(k_1) + b_1 = i(k_2) + b_2$, 又 $A \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ 正合且 β 子可减, $\therefore \beta$ 为满同态, 存在 $a_1, a_2 \in A$, 使 $\beta(a_1) = k_1, \beta(a_2) = k_2$, 即 $i\beta(a_1) + b_1 = i\beta(a_2) + b_2$, 又 1 可换, 得 $f(a_1) + b_1 = f(a_2) + b_2$, 即 $\forall (b_1, b_2) \in \rho_{\ker g} \Rightarrow (b_1, b_2) \in \text{Im } f, \rho_{\ker g} \subseteq \text{Im } f$.

反之, 设 $(b_1, b_2) \in \text{Im } f$, 则 $\exists (a_1, a_2) \in A$, 使 $b_1 + f(a_1) = b_2 + f(a_2)$, 由图(1)中之可换得 $b_1 + i\beta(a_1) = b_2 + i\beta(a_2)$, 记 $\beta(a_1) = k_1, \beta(a_2) = k_2$, 即

$b_1 + i(k_1) = b_2 + i(k_2), k_1, k_2 \in K$, 所以 $(b_1, b_2) \in \rho_{\ker g}$.

又由 $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ 正合, $\therefore (b_1, b_2) \in \rho_{\ker \pi}$, 得 $\pi(b_1) = \pi(b_2)$, 所以 $\alpha \pi(b_1) = \alpha \pi(b_2)$, 又由图(1)中之可换得 $g(b_1) = g(b_2)$, 即 $(b_1, b_2) \in \rho_{\ker g}$, 所以 $\text{Im } f \subseteq \rho_{\ker g}$. 综上即得 $\text{Im } f = \rho_{\ker g}$.

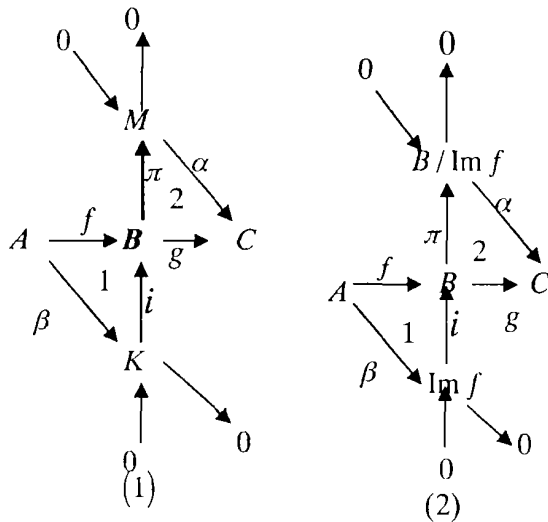


图 2

" $\Rightarrow$ " 首先, 若 $f \in \text{Hom}(A, B)$, 定义 i 为内射, 当然为同态, π 为自然满态, 则 $0 \rightarrow \text{Im } f \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/\text{Im } f \rightarrow 0$ 为短正合列. 我们考查图 2 之(2).

我们定义 $\beta(a) = f(a), \forall a \in A$. β 显然为满同态当然是子可减的且满足 $\beta i = f$, 即 1 可交换. 定义 $\alpha: B/\text{Im } f \rightarrow C, \alpha(b/\text{Im } f) = g(b), \forall b \in B$, 假设 $b_1/\text{Im } f = b_2/\text{Im } f$, 则 $\exists a_1, a_2 \in A$, 满足 $b_1 + f(a_1) = b_2 + f(a_2)$

$f(a_2)$, $\therefore (b_1, b_2) \in \equiv_{\text{Im} f}$, 又 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 正合, $\therefore g(b_1) = g(b_2)$, 即 $\alpha(b_1/\text{Im} f) = \alpha(b_2/\text{Im} f)$, 所以 α 定义合理.

且若 $\alpha(b_1/\text{Im} f) = \alpha(b_2/\text{Im} f)$, 则由 α 定义得 $g(b_1) = g(b_2)$, 由 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 正合知, $(b_1, b_2) \in \equiv_{\text{Im} f}$, 存在 $a_1, a_2 \in A$, 使 $b_1 + f(a_1) = b_2 + f(a_2)$, 即 $b_1/\text{Im} f = b_2/\text{Im} f$, $\therefore \alpha$ 为单, α 为同态因 g 为同态. 又 $\alpha\pi(b) = \alpha(b/\text{Im} f) = g(b)$, $\forall b \in B$, 可交换. 即证.

引理 2.4 设 P, B 为左 R -半模, 则下列命题等价:

(1) P 是 B 投射的左 R -半模.

(2) 对每一个以 B 居中的左 R -半模短正合列

$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, 都有 $0 \rightarrow \text{Hom}(P, A) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(P, C) \rightarrow 0$ 为短正合列.

定理 2.5 R 是半环, 则下列两个命题等价:

(I) P 是投射的左 R -半模;

(II) 对每个左 R -半模正合列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$,

f 是子可减的, 对序列 $\text{Hom}(P, A) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(P, C)$, 若是 $\bar{f}$ 子可减的, 则它是正合的.

证明 (II) $\Rightarrow$ (I) 取 $C=0$, g 为 0 同态, 对应 $\text{Hom}(P, C)$ 为 0, $\bar{g}$ 为 0 同态, 由 f 是子可减的, 得 f 为满同态, 又 $\bar{f}$ 为子可减故也为满同态, 再有 $\bar{f}$ 的定义, P 为投射的.

(I) $\Rightarrow$ (II) 由 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 正合知有引理 2.3 中的交换图, 由引理 2.4 知下图中的含 0 的序列都是正合的, 其中对每个同态 $*$, 定义同态 $\bar{*}$ 为: $\bar{*}(\xi) = * \xi$. 因 P 是投射的, β 是满同态, 当然是子可减的. 下面证明图 3 可换:

(1) 的交换性: $\bar{i}\beta(\xi) = \bar{i}\beta\xi = i\beta\xi = f\xi = \bar{f}(\xi)$;

(2) 的交换性: $\bar{\alpha}\pi(\gamma) = \bar{\alpha}\pi\gamma = \alpha\pi\gamma = g\gamma = \bar{g}(\gamma)$.

有引理 2.3 知 $\text{Hom}(P, A) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(P, C)$ 是正合的.

定理 2.6 P 是投射的左 R -半模, 对短正合列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, 若 f 是子可减的且 A 是可消半模, 则 $0 \rightarrow \text{Hom}(P, A) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(P, C) \rightarrow 0$ 短正合且 $\bar{f}$ 是子可减的.

证明 由引理 2.4 知为短正合列. 下证 $\bar{f}$ 是子可减的.

设 $\xi, \xi' \in \text{Hom}(P, A)$, $\gamma \in \text{Hom}(P, B)$, 满足 $\bar{f}$

$(\xi) + \gamma = \bar{f}(\xi')$, 有 $\bar{f}$ 的定义有 $f(\xi) + \gamma = f(\xi')$, 对 $\forall p \in P$, $f\xi(p) + \gamma(p) = f\xi'(p)$, 由 f 的子可减性, 存在 $a \in A$, 使 $f(a) = \gamma(p)$. 我们定义 $\xi'' \in \text{Hom}(P, A)$, 对上面的 p 和 a , 有 $\xi''(p) = a$. 证明其合理性: 若 $p_1 = p_2$, 有 $f\xi(p_1) + f\xi''(p_1) = f\xi'(p_1)$, $f\xi(p_2) + f\xi''(p_2) = f\xi'(p_2)$ 两个式子相加即得 $f\xi(p_1) + f\xi''(p_1) + f\xi'(p_2) = f\xi'(p_1) + f\xi(p_2) + f\xi''(p_2)$, 即

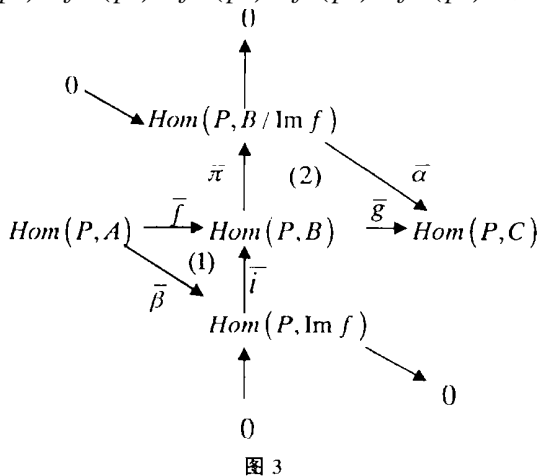


图 3

$f(\xi(p_1) + \xi''(p_1) + \xi'(p_2)) = f(\xi'(p_1) + \xi(p_2) + \xi''(p_2))$

又 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ 正合, f 为单同态, 有 $\xi(p_1) + \xi''(p_1) + \xi'(p_2) = \xi'(p_1) + \xi(p_2) + \xi''(p_2)$, 又 $f\xi(p_1) = f\xi'(p_2)$,

$f\xi(p_1) = f\xi(p_2)$, A 可消, 得 $\xi''(p_1) = \xi''(p_2)$. 故 ξ'' 定义合理. ξ'' 是同态易证.

所以 $\bar{f}$ 是子可减的.

在推论已知条件中把 A 可消换成 B 可消可以的到同样的结论, 证明是简单的.

参考文献:

- [1] Golan J S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science [M]. Exxcs, England: Longman scientific & technical, 1999.
- [2] H. M. J. Al-Thani, A note on projective semimodules[J]. KOBE J. MATH. 1995, (12): 89-94.
- [3] 陈培慈, 周媛兰. 半模的张量积[J]. 数学学报, 2002, (45).
- [4] 甘爱萍, 黄福生, 陈培慈. 半模正合列[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2003, (27).
- [5] H. M. J. Al-Thani, Characterizations of Projective and k-projective Semimodules[J]. IJMMS 2002, 32(7): 439-448.

(下转第 145 页)

5 结束语

由于参数 α, β 的选择, 本文给出的参数 LB 模型在数值模拟中提高了模型的灵活性, 并能适当改善松弛因子数值. 由于 CIMA 系统没有解析解, 本文仅对 CIMA 系统不同斑图进行了模拟, 对于不同参数下模型的比较, 还无法做出定量分析, 有待化学实验技术的进一步发展, 与其实验数据进行进一步比较.

参考文献:

- [1] Chen S, Doolen G. Lattice Boltzmann Methods for Fluid Flows [J]. Annu Rev Fluid Mech, 1998 30, 329—364.
- [2] Turing, A. M. The chemical basis of morphogenesis[J]. Philos. Trans. R. Lond. Ser. B, 1952, 237, 37—72.
- [3] Ouyang Q, Swinney H. L. Transition from a uniform state to

hexagonal and striped Turing patterns [J]. Nature. 1991, 352, 610—612.

- [4] 欧阳颀. 反应扩散系统中的斑图动力学 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.
- [5] Lengyel I, Epstein I. R. Modeling of Turing structure in the chlorite-iodide-malonic acid-starch reaction systems. Science [J]. 251, 650—652 (1991).
- [6] Chen S, Dawson S. P., Doolen G. D., etc. Lattice methods and their applications to reacting systems [J]. Comp. Chem. Eng. 1995, 19, 617—646.
- [7] Blaak R, Slood P. M. A. Lattice dependence of reaction-diffusion in lattice Boltzmann modeling [J]. Comp. Phys. Comm. 2000, 129, 256—266.
- [8] Li Q, Zheng C. G., Wang N. C., Shi B. C. LB-GK simulation of Turing patterns in CIMA model [J]. J. Scientific Computing. 2001, 16(2), 121—134.
- [9] 郭照立, 郑楚光, 李青, 等. 流体动力学的格子 Boltzmann 方法 [M]. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2002.

A Parameter LB Model for CIMA Systems

WANG Guang-chao¹, ZHU Xu-sheng¹

(1. School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013, China)

Abstract: A parameter lattice Boltzmann model for the CIMA systems is presented in the paper and the equations for the CIMA systems can be deduced from the model. For the model, the relaxation time factor can be computed from the parameter factor which makes the model is more flexible. Different parameter factors of the model are selected for the CIMA systems simulations, and images of the patterns are given in the paper.

Key words: lattice Boltzmann model; parameter model; CIMA systems; pattern dynamics

(上接第 138 页)

Projective Semimodules

QU Cong, WANG Song-sheng, ZHANG wei

(Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract: In the first part, we proof that tensor product of projective semimodules is still projective; In second part, we construct the equivalence condition of projective semimodule and Hom exact sequence.

Key words: tensor product of semimodule; projective semimodule; exact sequence.