文章编号:1005-0523(2006)05-0139-03

富足半群上的模糊理想

李春华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:利用kuroki在文[9]中的结论,研究了富足半群上的模糊理想,得到了富足半群上模糊理想的一些性质,最后,通过举例,证明了富足半群在非正则的情形下,其上的模糊理想所具有的好性质.

关 键 词:模糊集;富足半群;模糊理想

中图分类号:O152.7 **文献标识码:**A

1971年,Rosenfeld在文[1]中引入了模糊子群的概念,率先进行了模糊代数理论的研究.1979年,N·Kuraki[11]正式开始模糊子半群理论的研究,它是自模糊代数研究开始以来,模糊数学领域最活跃的研究领域之一[3,5,7,12-13].1980年后,N·Kuraki研究了半群中的模糊理想,得到了一些漂亮结果[9-10].目前,国内外许多学者对正则半群上的模糊理想进行了卓有成效的研究[5-6,16].值得一提的是,未曾见对富足半群[4]上相关模糊理论的研究.富足半群作为广义的正则半群[8],其上的模糊理想是否还具有正则半群上模糊理想所具有的好性质呢?本文将在这一方面作一些尝试.

1 若干准备

文中一般定义及记号均参见[4-5,8,15].

设 X 是一个非空集合,我们称映射 $f: X\to[0,1]$ 为X的一个模糊子集.对任意 $x\in X$,称 $f(x)$ 为 x 对 f 的隶属度.令 f,g 为半群 S 的两个模糊子集,我们作如下定义:

(1) $\forall x\in S, f\supseteq g\,(f=g)\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)\,(f(x)=g(x))$;

(2) $\forall x\in S, (f\cap g)(x)=f(x)\wedge g(x)$;$(f\cup g)(x)=f(x)\vee g(x)$;

(3) $\forall x\in S, (f\circ g)(x)=$

$$\begin{cases}\bigvee_{x=yz}\{f(y)\wedge g(z)\} & \exists\, y,z\in S,\text{满足 } x=yz\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

显然,以上"$\circ$"满足结合律.半群 S 的模糊子集 f 称为 S 的模糊子半群,若 $\forall a,b\in S, f(ab)\geq f(a)\wedge f(b)$;$f$ 称为 S 的模糊左理想(模糊右理想),若 $\forall a,b\in S, f(ab)\geq f(b)\,(f(ab)\geq f(a))$;$f$ 称为 S 的模糊理想,若 f 既是 S 的模糊左理想又是 S 的模糊右理想;f 称为 S 的模糊内理想,若 $\forall x,a,y\in S$, $f(xay)\geq f(a)$;f 称为 S 的模糊拟理想,若 $(f\circ S)\cap(S\circ f)\subseteq f$.

引理 1.1[5] 令 f 为半群 S 的模糊子集,则以下各款成立:

(1) f 为 S 的模糊子半群当且仅当 $f\circ f\subseteq f$;

(2) f 为 S 的模糊左理想当且仅当 $S\circ f\subseteq f$;

(3) f 为 S 的模糊右理想当且仅当 $f\circ S\subseteq f$;

Fountain在文[4]中定义了半群S上的等价关系 c^*,S 的元素 a,b 符合关系 c^* 当且仅当 $(\forall x,y\in S^1)(ax=ay\Leftrightarrow bx=by)$ 对偶地定义 R^*.

引理 1.2[2] 令 S 为半群,$a,b\in E$, $e=e^2$ 则以下各款等价:

(i) $aL^*e\,(aR^*e)$;

(ii) $a=ae\,(a=ea)$ 且 $\forall x,y\in S^1$, $ax=ay\Rightarrow ex=ey\,(xa=ya\Rightarrow xe=ye)$.

为方便记,我们用 $L_a{}^*$ 表示含 a 的 L^* 一类,

收稿日期:2006-01-24

基金项目:华东交通大学科研基金资助项目.

作者简介:李春华(1973-),男,江西宜丰人,讲师,主要从事正则半群及富足半群理论的研究.

中国知网 https://www.cnki.net

用 $R_a{}^*$ 表示含 a 的 R^* 一类. $E(T)$ 表示 T 中的幂等元集. 记 a^+ 为 $E(R_a^*)$ 中元, a^* 为 $E(L_a^*)$ 中元. 半群 S 称为富足的, 如果它的所有的 L^* 一类及 R^* 一类都含幂等元. 显然, 对富足半群 S 中任意元素 a, 恒有 $a=a^+a=aa^*$.

2 主要结果

命题 2.1 令 S 为富足半群, f 为半群 S 的模糊子集, 则 f 为 S 的模糊内理想当且仅当 f 为 S 的模糊理想.

证明 令 f 为 S 的模糊内理想, 则 $\forall$ a, b$\in S$, $a=a^+a$, $b=bb^*$. 故 $f(ab)=f(a^+ab)\geq f(a)$, $f(ab)=f(abb^*)\geq f(b)$. 即 f 为 S 的模糊理想. 反之, 令 f 为 S 的模糊理想, 则 $\forall$ a, b, c$\in S$, 有 $f(abc)=f(a(bc))\geq f(b)$. 即 f 为 S 的模糊内理想.

定理 2.2 令 S 为富足半群, 则以下各款成立:

(1) 若 f, g, 均为 S 的模糊内理想且 $\forall$ a$\in S$, $g(a)=g(a^*)$(或 $f(a)=f(a^+)$), 则 $f\cap g=f\circ g$;

(2) 若 f 为 S 模糊内理想且 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^*)$(或 $f(a)=f(a^+)$), 则 $f\circ f=f$;

(3) 若 f 为 S 的模糊右理想, g 为 S 的模糊左理想且 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^+)$, (或 $g(a)=g(a^*)$), 则 $f\cap g=f\circ g$;

(4) 若 f 为 S 的模糊右理想且 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^+)$, 则 $f\circ f=f$;

(5) 若 f 为 S 的模糊左理想且 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^*)$, 则 $f\circ f=f$;

证明 (1)先证 $f\circ g\subseteq f\cap g$. 事实上, 因 f, g 均为 S 的模糊内理想, 由命题 2.1, f, g 均为 S 的模糊理想. 于是, 由引理 1.1, $f\circ g\subseteq f\circ S\subseteq f$, $f\circ g\subseteq S\circ g\subseteq g$. 故 $f\circ g\subseteq f\cap g$. 另一方面, S 为富足半群, 故 $\forall$ a$\in S$, $a=aa^*=a^+a$. 若 $g(a)=g(a^*)$, ($f(a)=f(a^+)$ 可类似证), 则 $(f\circ g)(a)=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge g(y)\}\geq f(a)\wedge g(a^*)=f(a)\wedge g(a)=(f\cap g)(a)$. 反包含成立. 故 $f\cap g=f\circ g$. (2)令 f 为 S 模糊内理想, 则由命题 2.1, f 为 S 的模糊理想. 又由引理 1.1, $f\circ f\subseteq f\circ S\subseteq f$. 另一方面, 假设 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^*)$ ($f(a)=f(a^+)$ 可对偶证), 则有 $(f\circ f)(a)=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge f(y))\}\geq f(a)\wedge f(a^*)=f(a)\wedge f(a)=f(a)$. 即 $f\circ f\supseteq f$. 因此, $f\circ f=f$. (3)先证 $f\circ g\subseteq f\cap g$. 事实上, 若 f 为 S 的模糊右理想, g 为 S 的模糊左理想, 则由引理 1.1, $f\circ g\subseteq f\circ S\subseteq f$, $f\circ g\subseteq S\circ g\subseteq g$. 于是 $f\circ g\subseteq f\cap g$. 另一方面, 由 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^+)$, ($g(a)=g(a^*)$ 可对偶证), 有 $(f\circ g)(a)=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge g(y)\}\geq f(a^+)\wedge g(a)=f(a)\wedge g(a)=(f\cap g)(a)$. 即 $f\circ g\supseteq f\cap g$. 故 $f\cap g=f\circ g$. (4)令 f 为 S 的模糊右理想, 则由引理 1.1, 有 $f\circ f\subseteq f\circ S\subseteq f$. 又因 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^+)$, 故 $(f\circ f)(a)=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge f(y))\}\geq f(a)\wedge f(a^+)=f(a)\wedge f(a)=f(a)$. 即 $f\circ f\supseteq f$. 因此, $f\circ f=f$. (5)可由(4)的对偶结论直接推得.

注记 富足半群是广义正则半群[8], 那么, 是否存在上述富足半群在非正则半群的情形下结论的正确性呢? 下面举个例子说明在这种情形下定理的正确性(只验证定理 2.2(1), 其余各款可类似验证).

例 1 令 $S=\{2^n|n\in N\cup\{0\}\}$. 显然 S 关于通常数的普通乘法是一个非正则的消去幺半群. 即 S 为非正则富足半群且 $\forall$ a$\in S$, $a^+=a^*=1$. 现作如下定义: $f: S\to[0,1]$, $f(a)=1-\frac{1}{a}$, ($\forall$ a$\in S$); $g: S\to[0,1]$, $g(a)=1-\frac{1}{a^*}$, 显然, ($\forall$ x, y, z$\in S$, $f(xyz)=1-\frac{1}{xyz}\geq 1-\frac{1}{y}=f(y)$. 故 f 为 S 的模糊内理想. 同理, g 为 S 的模糊内理想且 $\forall$ a$\in S$, $g(a)=g(a^*)=0$. 故 $(f\circ g)(a)=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge g(y)\}=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge 0\}=0$; $(f\cap g)(a)=f(a)\wedge g(a)=f(a)\wedge 0=0$. 即 $f\cap g=f\circ g$.

定理 2.3 令 S 为富足半群, 则以下各款成立:

(1)若 f 为 S 的模糊拟理想, g 为 S 模糊理想, ($\forall$ a$\in S$) $f(a)=f(a^*)=f(a^+)$, 则 $f\cap g=f\circ g\circ f$.

(2)若 f 为 S 的模糊拟理想, g 为 S 模糊内理想, ($\forall$ a$\in S$) $f(a)=f(a^*)=f(a^+)$则 $f\cap g=f\circ g\circ f$.

证明 (1)先证 $f\circ g\circ f\subseteq f\cap g$. 事实上, 若 f 为 S 的模糊拟理想, 则易知 $f\circ g\circ f\subseteq f\circ S\circ S\cap S\circ S\circ f\subseteq f\circ S\cap S\circ f\cap f$. 又 g 为 S 的模糊理想, 故 $f\circ g\circ f\subseteq S\circ g\circ S\subseteq g$. 于是, $f\circ g\circ f\subseteq f\cap g$. 另一方面, 若 $\forall$ a$\in S$, $f(a)=f(a^*)=f(a^+)$, 则 $(f\circ g\circ f)(a)=\bigvee_{a=xy}\{f(x)\wedge(g\circ f)(y)\}\geq f(a^+)(g\circ f)(aa^*)=f(a)\wedge(\bigvee_{aa^*=pq}\{g(p)\wedge f(q)\})\geq f(a)\wedge(g(a)\wedge f(a^*))=f(a)\wedge g(a)\wedge f(a)=f(a)\wedge g(a)=(f\cap g)(a)$. 即 $f\circ g\circ f\supseteq f\cap g$. 故 $f\cap g=f\circ g\circ f$. (2)可由命题 2.1 及(1)直接推得.

例 2 令 $S=\{2^n|n\in N\cup\{0\}\}$. 显然 S 关于通常数的普通乘法为非正则的富足半群且 $\forall$ a$\in S$,

中国知网 https://www.cnki.net

$a^{+}=a^{*}=1$.现作如下定义:$f: S\to[0,1]$, $f(a)=1-\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$, $(\forall a\in S)$; $g: S\to[0,1]$, $g(a)=1-\frac{1}{a}$, $(\forall a\in S)$.容易验证 g 为 S 模糊理想.下证 f 为 S 的模糊理想.显然, $\forall a\in S$,有 $(S\circ f)(a)=\bigvee_{a=xy}S(x)\wedge f(y)=\bigvee_{a=xy}(1\wedge\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.同理 $(f\circ S)(a)=\frac{1}{2}$.于是 $(f\circ S)\cap(S\circ f)=f$,故 f 为 S 的模糊拟理想.

下验证定理2.3结论(1)的正确性,结论(2)可类似验证. $\forall a\in S$,分两种情形讨论:(i)当 $a=1$ 时, $(f\cap g)(1)=f(1)\wedge g(1)=0$.而 $(f\circ g\circ f)(1)=\bigvee\bigvee_{1=1\times1}(f\circ g)(1)\wedge f(1)=\bigvee_{1=1\times1}[\bigvee_{1=1\times1}f(1)\wedge g(1)]\wedge f(1)=0$.($ii$)当 $a\neq1$ 时, $(f\cap g)(a)=f(a)\wedge g(a)=\frac{1}{2}\wedge(1-\frac{1}{a})=\frac{1}{2}$.而 $(f\circ g\circ f)(a)=\bigvee_{a=xy}(f\circ g)(x)\wedge f(y)=\bigvee_{a=xy}[\bigvee_{x=pq}f(p)\wedge g(q)]\wedge\frac{1}{2}=\bigvee_{a=xy}\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.即 $f\cap g=f\circ g\circ f$.

参考文献:

[1] A. Rosenfeld. Fuzzy groups[J]. J. Math. Anal. Appl., 35 (1971) 512—517.

[2] A. El-Qalliali and J. B. Fountain. Idempotent-connected abundant semigroups[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A91 (1981), 79—90.

[3] G. Gerla. Code theory and fuzzy subsemigroups[J]. J. Math. Anal. Appl., 128(1987) 362—369.

[4] J. B. Fountain. Abundant semigroups[J]. Proc. London Math. Soc. 44(1982), 103—129.

[5] John N. Mordeson, Davender S. Malik and Nobuaki Kuroki. Fuzzy semigroups[M]. Springer-verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.

[6] J. Z. Shen. On fuzzy regular subsemigroups of a semigroup [J]. Inform. Sci., 51(1990) 111—120.

[7] K. A. Dib and N. Galhum. Fuzzy ideas and fuzzy bi-ideas in fuzzy semigroups[J]. Fuzzy Sets and Systems, 92(1997) 103—111.

[8] M. Petrich. Completely regular semigroups[M]. New York: Jhon Wiley&Sons Inc, 1999.

[9] N. Kuroki. On fuzzy ideas and fuzzy bi-ideas in semigroups [J]. Fuzzy Sets and Systems, 5(1981) 203—215.

[10] N. Kuroki. Fuzzy semiprime ideas in semigroups[J]. Fuzzy Sets and Systems, 8(1982) 71—80.

[11] N. Kuroki. Fuzzy bi-ideas in semigroups[J]. Comment. Math. Univ. St. Paul, 28(1979) 17—21.

[12] N. Kuroki. On fuzzy semigroups[J]. Inform. Sci. , 53 (1991) 203—236.

[13] P. Das. Fuzzy multiplicative semigroups[J]. Fuzzy Sets and Systems, 105(1999) 171—176.

[14] P. Wang and W. J. Liu. Fuzzy regular subsemigroups in semigroups[J]. Inform. Sci., 68(1993) 225—231.

[15] Zadeh L. Fuzzy sets[J]. Inform. Control, 1965(8), 338—353.

[16] 谭宜家.关于模糊正则半群[J].模糊系统与数学, 1996,10(1):55—60.

Fuzzy Ideals on Abundant Semigroups

LI Chun-hua

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we study fuzzy ideals on abundant semigroups and get some properties of fuzzy ideals on such semigroups.

Key words: fuzzy set; abundant semigroup; fuzzy ideal

中国知网 https://www.cnki.net