第24卷第1期 华东交通大学学报 Vol.24 No.1
2007年2月 Journal of East China Jiaotong University Feb.,2007

文章编号:1005-0523(2007)01-0142-03

一个角平分线猜想不等式的证明

刘 健

(华东交通大学 初等数学研究所,江西 南昌 330013)

摘要:应用三角形一个重要的基本不等式,证明了有关三角形内角平分线之和的一个猜想不等式:设 w_a, w_b, w_c 与 s 分别是三角形三条内角平分线和半周长,R, r 分别为三角形的外接圆半径,则 $(w_a+w_b+w_c)^2 s^2+102Rr/5+66r^2/5$. 指出了一个相关的值得进一步探讨的问题.

关 键 词:三角形;不等式;内角平分线;最小值
中图分类号:O.178 **文献标识码:**A

1 引言

从文献[1]可知,杨学枝在1997年曾提出以下有关三角形内角平分线的不等式猜想:设△ABC的三条边与相应边上的内角平分线长分别为a, b, c和w_a, w_b, w_c,其外接圆半径与内切圆半径分别为R, r,则有

$$(w_a+w_b+w_c)^2\leqslant s^2+\frac{41}{2}Rr+13r^2 \tag{1}$$

其中 $s=(a+b+c)/2$. 这个猜想后为褚小光证明.

本文将证明下述更强的不等式(2)成立:

定理 在△ABC中有

$$(w_a+w_b+w_c)^2\leqslant s^2+\frac{102}{5}Rr+\frac{66}{5}r^2 \tag{2}$$

等号当且仅当△ABC为正三角形时成立.

不等式(2)是尹华焱在文献[2]中提出的. 由 *Euler* 不等式 $R\geqslant 2r$ 即知(2)式强于(1)式. 我们已经知道在许多的有关和式$\sum w_a$($\sum$表示循环和,下同此)的上界不等式中,不等式(1)是属于较强的,它可以用来推证一些其它的不等式. 不等式(2)中的系数较不等式(1)更接近最优,目前尚未见到强于不等式(2)的其它结果.

2 定理的证明

为证不等式(2),先给出几个引理. 以下未作说明的符号意义同上.

引理1[3] 在△ABC中有

$$\sum w_a^2=\frac{s^6+3(32R^2+40Rr+3r^2)r^2s^2+(4R+r)^4r^2}{(s^2+2Rr+r^2)^2}. \tag{3}$$

引理2 在△ABC中有

$$\frac{1}{w^a}+\frac{1}{w_b}+\frac{1}{w_c}\leqslant\frac{1}{2R}+\frac{3}{4r}, \tag{4}$$

收稿日期:2006-10-18
作者简介:刘健(1963-),男,江西兴国人,助理研究员.

等号当且仅当△ABC为正三角形时成立.

不等式(4)是本文作者在1994年提出的，后相继被黎建平[4]、杨学枝[5]等证明.

引理3　在△ABC中有

$$s^4-2(2R^2+10Rr-r^2)s^2+r(4R+r)^3\leqslant 0, \tag{5}$$

等号仅当△ABC为等腰三角形时成立.

不等式(5)被视为三角形的基本不等式，参见[6].

引理4　在△ABC中有

$$16Rr-5r^2\leqslant s^2\leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \tag{6}$$

不等式链(6)的左半不等式即为著名的Gerretsen不等式之一，右半不等式易可由(5)式导出，参见专著[6].

定理的证明　显然不等式(2)等价于

$$\sum w_a^2+2\sum w_bw_c\leqslant s^2+\frac{102}{5}Rr+\frac{66}{5}r^2 \tag{7}$$

易证恒等式：

$$w_aw_bw_c=\frac{16Rr^2s^2}{s^2+2Rr+r^2} \tag{8}$$

由此与引理2的不等式(4)知

$$\sum w_bw_c\leqslant\frac{4(3R+2r)rs^2}{s^2+2Rr+r^2} \tag{9}$$

于是按引理1就知，要证不等式(7)只要证：

$$\frac{s^6+3(32R^2+40Rr+3r^2)r^2s^2+(4R+r)^4r^2}{(s^2+2Rr+r^2)^2}+\frac{4(3R+2r)rs^2}{s^2+2Rr+r^2}\leqslant s^2+\frac{102}{5}Rr+\frac{66}{5}r^2$$

即

$$(5s^2+102Rr+66r^2)(s^2+2Rr+r^2)^2$$
$$\geqslant 20(3Rr+2r^2)(s^2+2Rr+r^2)(s^2+2Rr+r^2)s^2+[s^6+3(32R^2+40Rr+3r^2)S^2+(4R+r)^4r^2]$$

展开整理后为

$$(2R-19r)s^4+(28R^2+8Rr+42r^2)rs^2+(408R^3+592R^2r+326Rr^2+61r^3)r^2\geqslant 0 \tag{10}$$

由引理3知，要证上式只要证：

$$(2R-4r)s^4+(28R^2+8Rr+42r^2)rs^2+(408R^3+592R^2r+326Rr^2+61r^3)r^2$$
$$-15r[2(2R^2+10Rr-r^2)s^2-r(4R+r)^3]\geqslant 0$$

即是

$$(2R-4r)s^4-(32R^2+292Rr-72r^2)rs^2+(1368R^3+1312R^2r+506Rr^2+76r^3)r^2\geqslant 0, \tag{11}$$

记上式左端之值为Q，则可验证恒等式：

$$Q\equiv(2R-4r)(s^2-16Rr+5r^2)^2+8r(4R^2-55Rr+14r^2)(s^2-16Rr+5r^2)$$
$$+8(R-2r)(171R^2-226Rr+24r^2)r^2 \tag{12}$$

于是由Euler不等式$R\geqslant 2r$可知，要证(11)式只要证：

$$(4R^2-55Rr+14r^2)(s^2-16Rr+5r^2)+r(R-2r)(171R^2-226Rr+24r^2)\geqslant 0 \tag{13}$$

由$R\geqslant 2r$知$171R^2-226Rr+24r^2>0$，所以当$4R^2-55Rr+14r^2>0$时，按引理4的左半不等式知上式成立.

现设$4R^2-55Rr+14r^2<0$，我们来证(13)式这时也成立.根据引理4这时只要证：

$$(4R^2-55Rr+14r^2)(2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}-16Rr+5r^2)+r(R-2r)(171R^2-226Rr+24r^2)\geqslant 0 \tag{14}$$

即 $2(R-2r)(4R^2-55Rr+14r^2)(R-r+\sqrt{R^2-2Rr})+r(R-2r)(171R^2-226Rr+24r^2)\geqslant 0$

即

$$(R-2r)[8R^3+53R^2r-88Rr^2-4r^3+2(4R^2-55Rr+14r^2)\sqrt{R^2-2Rr}]\geqslant 0$$

由于$R-2r\geqslant 0$，所以只要证：

$$8R^3+53R^2r-88Rr^2-4r^3>-2(4R^2-55Rr+14r^2)\sqrt{R^2-2Rr} \tag{15}$$

在上述假设情况下，上式右端大于零，因此要证上式只要证：

$$(8R^3+53R^2r-88Rr^2-4r^3)^2-[2(4R^2-55Rr+14r^2)\sqrt{R^2-2Rr}]^2>0,$$

展开后为

$$(2736R^5-14667R^4r+21864R^3r^2-5784R^2r^3+2272Rr^4+16r^5)>0$$

为证上式只要证：

$$(2736R^4-14667R^3r+21864R^2r^2-5784Rr^3+2272r^4)R>0 \tag{16}$$

记$\frac{R}{r}=x+2$，则由 Euler 不等式知$x\geqslant 0$，上式的证明化为

$$2736(x-2)^4-14667(x-2)^3+21864(x-2)^2-5784(x-2)+2272>0$$

(其中 $x\geqslant 0$)也即

$$f(x)\equiv 2736x^4-36555x^3+175530x^2-356796x+262408>0 \tag{17}$$

令 $f'(x)=0$，则有

$$10944x^3-109665x^2+351060x-356796=0$$

解得实根 $x_1\approx 2.155$，$x_2\approx 3.348$，$x_3\approx 4.515$，从而容易得到 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$的最小值为 $f(x_1)\approx f(2.155)\approx 1847.715$，这表明 $f(x)>0$，不等式(17)成立．综上，可知不等式(13)对任意三角形成立，从而不等式(2)获证，且易确定其等号成立的条件．定理证毕．

3 未解决的问题

尹华焱在提出不等式(2)的同时，还提出了以下问题：对任意△ABC，求使不等式

$$(w_a+w_b+w_c)^2\leqslant s^2+kRr+(54-2k)r^2 \tag{18}$$

成立的最佳 k 值(即最大常数)．

上述问题看来很困难，笔者应用计算机进行计算，结果发现 k 的最大值不超过 20.3，这表明不等式(2)还可稍作改进，如何建立更强的不等式，这也有待进一步探讨．

参考文献：

[1]杨学枝．不等式研究[M]．拉萨：西藏人民出版社，2000．

[2]尹华焱．100 个涉及三角形 Ceva 线、傍切圆半径的不等式猜想[M]．拉萨：西藏人民出版社，2000．

[3]王振，陈计．两个猜想不等式的加强及其它[J]．中学教研(数学)，1994，7－8：51－53．

[4]黎建平．一个猜想的证明[J]．湖南数学通讯，1995，2：39－40．

[5]杨学枝．关于角平分线的一个不等式[J]．数学通讯，1995，8：17－18．

[6]D．S．Mitrinovic，J．E．Pecaric and V．Volenec，Recent Asvances in Geometric Inequalities[M]．Kluwer Academic Publishers，1989．

A Proof of the Conjectured Inequality on Angular Bisector

LIU Jian

(East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Absract：An important basic inequality for triangles is employed to prove a conjectured inequality for the sum of triangle' s inner angular bisector：Let w_a, w_b, w_c, s, r, R be the three inner angular bisectors semi-cirumference inradius and circumradius respectively，then $(w_+ + w_b+w_c)^2\leqslant s^2+102Rr/5+66r^2/5$. A televant question worthy of further delvement is put forward．

Key words：triangle；inequality；inner angular bisector；minimum