文章编号:1005－0523(2007)01－0149－07

一类更细的正项级数审敛原则

刘丽君

(湖南冶金职业技术学院 基础课部,湖南 株洲 412000)

摘要:以一组收敛速度更慢的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\text{lan}(i,n)\text{lan}(k,n)^{p}}$ (p 为常数,$k\in N_{+}$,$\text{lan}(i,n)=\underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{i个\ln}$ 为标准,在对数判别法、Rabbe 判别法和 Gauss 判别法的基础上建立起一类更强、更精细的审敛原则;同时随常数 k 的增大,该级数敛散更慢,以此为基的审敛法就越强、越细、越精,能判定敛散的级数范围也越宽,而 k 是可以无限增大的,使得新的判别法在理论上可以判别绝大部分级数的敛散性.

关 键 词:正项级数;收敛速度;审敛准则

中图分类号:O173.1 **文献标示码**:A

我们知道一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 趋于它的和 S 的快慢,就是它的余项 r_n 趋于 0 的快慢,那么对于两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$、收敛速度的比较就是看它们的余项 r_n 和 R_n 趋于 0 的快慢,即考察 $\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma n^p}{r^n}$ 的值.若 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{R_n}=0$,称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛速度快;若 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{R_n}=\infty$,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛速度慢.而 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{R_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s-s_n}{S-S_n}\overset{\text{Stolz 定理}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{s_n-s_{n-1}}{S_n-S_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$,所以两个级数收敛速度的比较即为考察两级数通项的比值的极限.如果两个级数发散的话,它们的余项趋于无穷大,同样有 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{R_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{v_n}$,若 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{v_n}=0$,称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散速度慢;若 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{R_n}=\infty$,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散速度快.

一个正项级数审敛性判别法的强弱与它建立时所基于的标准级数的敛散速度有关:标准级数敛散得快,以它为基的判别法就只能判别比它敛散更快的级数;如果标准级数敛散得较慢,以它为基的判别法就会更灵敏,判别敛散的级数范围也越广.如:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$ 的收敛速度比 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n(0<r<1)$ 的收敛速度慢($\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}}{r^n}=0,p>1,0<r<1$),基于 P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$ 的 Rabbe 判别法、对数判别法和 Gauss 判别法就比基于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n(0<r<1)$ 的 D' Alembert 比值判别法和 Cauchy 根式判别法要强,判别范围也越广.因此,如果我们能找到收敛速度更慢的级数作为比较标准,就能建立更强、更细和更精的判别法.

作级数串 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot(\ln\ln\ln n)^p}$、……、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\text{lan}(i,n)\text{lan}(k,n)^p}$、……($p$ 为常数,$k\in N_{+}$,$\text{lan}(i,n)=\underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{i个\ln}n$),根据 Cauchy 积分判别法,级数

收稿日期:2006－12－16

作者简介:刘丽君(1968－),女,湖南怀化人,硕士,讲师,研究方向:数学教育和基础数学.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k,n)^{p}}$与积分

$\int_{N}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,x)\mathrm{lan}(k,x)^{p}}$($N$是一个使$\mathrm{lan}(k,N)$为正数的常数)同敛散,而$\int_{N}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,x)\mathrm{lan}(k,x)^{p}}$

$$=\frac{\mathrm{lan}(k,x)^{1-p}}{1-p}\Big|_{N}^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p\leqslant 1\\ \frac{1}{(p-1)\mathrm{lan}(k,N)^{p-1}}, & p>1\end{cases},$$

所以,当$p>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k,n)^{p}}$收敛,该级数串是收敛的;当$p\leqslant 1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k,n)^{p}}$是发散的,该级数串是发散的.

又由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1/\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k,n)^{p}}{1/\prod_{i=0}^{k}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k+1,n)^{p}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k+1,p)^{p-1}}{(p-1)\prod_{i=0}^{k}\mathrm{lan}(i,n)\mathrm{lan}(k,p)^{p-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p\,\mathrm{lan}(k+1,p)^{p-1}}{(p-1)\mathrm{lan}(k,n)^{p-1}}=\begin{cases}0, & p>1\\ \infty, & p\leqslant 1\end{cases}$$

即当$p>1$时级数串中每前一个级数的通项是后一个级数的通项的高阶无穷小,也就是说每后一个级数比前一个级数收敛得更慢,那么以后面的级数作为比较标准就能建立更强、更细的判别法.当时,级数串中每后一个级数的通项是前一个级数的通项的高阶无穷小,即每后一个级数比前一个级数发散得更慢.

下面以收敛更慢的级数为标准对对数判别法、Rabbe判别法、Gauss判别法分别提出改进.

1 对对数判别法的改进

引理1 (对数判别法)正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\rho,\text{则}$$

1) 当$\rho>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;

2) 当$\rho<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

我们以较级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}(p>1)$收敛得更慢的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}}(p>1)$为标准级数,得到下面的定理:

定理1.1 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,若$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/na_n)}{\ln\ln n}=\rho$,则

1) 当$\rho>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;

2) 当$\rho<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证 1) 当$\rho>1$时,$\forall\rho_1$(使$1<\rho_1<\rho$),$\exists$ N(N$\in N_+$),当$n>N$时,有

$\frac{\ln(1/(na_n)}{\ln\ln n}>\rho_1$,即:$\ln 1/(na_n)>\rho_1\ln\ln n=\ln(\ln n)^{\rho_1}$,$a_n<\frac{1}{n(\ln n)^{\rho_1}}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\rho_1}}(\rho_1>1)$收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

2) 当$\rho<1$时,$\exists$ N(N$\in N_+$),当$n>N$时,有$\frac{\ln 1/(na_n)}{\ln\ln n}<1$,即:$\ln\frac{1}{na_n}<\ln\ln n$,$a_n>\frac{1}{n(\ln n)}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$发散,故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

如果以收敛速度更慢的级数$\sum_{n=1}^{\infty}1/(n\ln n(\ln\ln n)^{p})(p>1)$为标准级数,就得到更细致的判别法:

定理1.2 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,

若$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/n\ln n\cdot a_n))}{\ln[\ln\ln n]}=\rho$,则

1) 当$\rho>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;

2) 当$\rho<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

更一般地,我们还可得到下面的判别法,其强弱依赖常数k,k越大判别法越强、越细致,所能判定级数的敛散范围也更宽.

定理1.3 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,若

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/(\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)a_n))}{\mathrm{lan}(k,n)}=\rho$(其中$k$是正整数常数),则

1) 当$\rho>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;

2) 当$\rho<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

2 对Rabbe判别法的改进

引理2 (Rabbe判别法)正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r$，则

1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

如果以较级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$ 收敛得更慢的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n(\ln n))^p(p>1)$ 为标准级数，得到下面的定理：

定理 2.1　(Bertrand 判别法) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\ln n[\mathrm{n}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]=r$，则

1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

以收敛速度更慢的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}(p>1)$ 为标准级数，可得：

定理 2.2　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\ln\ln n\{\ln n[\mathrm{n}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\}=r$，则

1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

更一般地我们还可得到下面推广的 *Rabbe* 判别法，其强弱同样依赖于常数 k，k 越大判别法越强、越细致，所能判定敛散的范围也更宽.

定理 2.3　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{lan}(k,n)\{\mathrm{lan}(k-1,n)[\cdots[\mathrm{n}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]\cdots]-1\}=r$，其中 k 是正整数常数，则

1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3　对 Gauss 判别法的推广

引理 3　(Gauss 判别法) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，从某项起有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$，其中 λ_0、λ_1 为常数，而 θ_n 是有界量：$|\theta_n|\leqslant L$，则

1) 如果 $\lambda_0>1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 如果 $\lambda_0<1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

以收敛较慢的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{1}{n(\ln n)^p}(p>1)$ 为标准级数，可得下面定理：

定理 3.1　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，从某项起有 $\frac{a_n}{a_{n+!}}=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n\ln n}+\frac{\theta_n}{n^2}$，其中 λ_0、λ_1、λ_2 为常数，而 θ_n 是有界量：$|\theta_n|\leqslant L$，则

1) 如果 $\lambda_0>1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1>1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=1$, $\lambda_2>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 如果 $\lambda_0<1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1<1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=1$, $\lambda_2\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证　(令 $b_n=\frac{1}{n(\ln n)^p}$，比较 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 与 $\frac{b_n}{b_{n+1}}$，由比较判别法可证)

以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}(p>1)$ 为标准级数，可得：

定理 3.2　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，从某项起有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n\ln n}+\frac{\lambda_3}{n\ln n\cdot\ln\ln n}+\frac{\theta_n}{n^2}$，其中 λ_0、λ_1、λ_2、λ_3 是常数，而 θ_n 是有界量：$|\theta_n|\leqslant L$，则

1) 如果 $\lambda_0>1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1>1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=1$, $\lambda_2>1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 如果 $\lambda_0<1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1<1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=1$, $\lambda_2<1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

更进一步地，有

定理 3.3　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，从某项起有

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n\ln n}+\frac{\lambda_3}{n\ln n\cdot\ln\ln n}+\cdots+\frac{\lambda_k}{\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{lan}(i,n)}+\frac{\theta_n}{n^2}$，其中 $\lambda_i(i=0、1、2、\cdots、k)$ 是常数，而 θ_n 是有界量：$|\theta_n|\leqslant L$，则

1) 如果 $\lambda_0>1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1>1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=1$, $\lambda_2>1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3>1$ 或者……，或者 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{k-1}=1$, $\lambda_k>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2) 如果 $\lambda_0<1$ 或者 $\lambda_0=1$, $\lambda_1<1$ 或者 $\lambda_0=\lambda_1$

$=1$, $\lambda_2<1$ 或者……，或者 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{k-1}=1$，$\lambda_k\leqslant1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

由于级数串 $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\operatorname{lan}(i,n)\operatorname{lan}(k,n)^p}\right\}$ 中的级数随 k 值的增大，敛散速度越慢，以此为基的判别法就越强，越细、越精，能判定敛散的级数范围也越宽.而级数串中的 k 是可以无限增大的，所以以上的新的判别法至少在理论上应该能判定绝大部分级数的敛散性.

参考文献：

[1]菲赫金哥尔茨.微积分学教程(第二卷第二分册)[M].北京：人民教育出版社，1979.

A Group of More Accurate Positive Series' Principle

LIU Li-jun

(Dept of Basic Cources, Hunan Metallurgical Professional Technology College, Zhuzhou 412000, China)

Abstract: according to a group of series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}\operatorname{lan}(i,n)\operatorname{lan}(k,n)^p}$ (p as a constant, $k\in N_+$, $\operatorname{lan}(i,n)=\underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{i\text{个}\ln}n$), in which the convergence is at much lower speed and on the basis of logarithm identification, Rabbe identification, and Gauss identification as well, This paper constructs a set of much stronger and more accurate principle of convergence divergence. Meanwhile, as k, as a constant, is increasing, The series' convergence or divergence is getting much slower, and accordingly, the convergence divergence is getting stronger, thinner and more accurate and also the series range which can judge the convergence is wider, however, k, as a constant, can be increased unlimitedly, which makes the new identifications, in theory, differentiate most of the convergence and divergence of series.

Key words: positive series; the rate of convergence; convergent divergence technique