

文章编号:1005—0523(2007)01—0153—02

关于图的谱半径的新的上界

李树栋,冯立华

(山东工商学院 数学学院,山东 烟台 264005)

摘要:主要得到了一个关于图的谱半径的新的上界,并举例说明在某些情况下我们的结果是好的.

关键词:图;匹配数;谱半径;

中图分类号:0157.5 **文献标识码:**A

我们主要研究简单无向图.设 $G=(V, E)$ 是一个简单无向图,其顶点集与边集分别为 V 和 E .对任意的 $v \in V$,点 v 的度表示 d_v , G 的度序列记 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$,其中最大度为 $\Delta = d_1$,最大度为 $\Delta = d_1$,最小度为 $\delta = d_n$.点 v 的平均 2 一度表示为 m_v ,等于 $(\sum_{u,v \in E(G)} d_u) \mid d_v$,则称 $d_v m_v$ 是 v 的 2 一度.对于两个点 u 和 v ,我们用 $u \square v$ 表示这两个点是相邻的.

图 G 的邻接矩阵定义为 $A(G) = (a_{ij})$,这里

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ij \in E(G); \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

$A(G)$ 的最大特征值称为 G 的谱半径,表示 $\rho(G)$.令 $D(G)$ 为 G 的角对角矩阵,则我们称 $L(G) = D(G) - A(G)$ 为 G 的 Laplacian 矩阵,则称矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$ 为 G 的 Q -矩阵. $L(G)$ 的特征值为 G 的 Laplacian 矩阵的特征值,记为 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$.我们用 $\sigma(G)$ 表示 $Q(G)$ 的最大特征值,并称之为 G 的 Q -谱半径.

1)^[2] 设 G 是简单连通图,则 $\rho(G) \leq \max_{u,v} \sqrt{d_u d_v}$ (1) 等号成立当且仅当 G 是正则图或半正则偶图.

2)^[5] 设 G 是简单连通图,则 $\rho(G) \leq \max_{u,v} \sqrt{m_u m_v}$ (2) 等号成立当仅当 G 中的所有点具有相同的平均 2 一度,或是一个偶图,其中同一色类中的点具有相同的平均 2 一度.

3)^[3] 设 G 是具有 n 个顶点 m 条边的简单连通图,最大度为 Δ ,则

$$\rho(G) \leq \frac{1}{2} (\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4(2m - \delta_n)}) \quad (3)$$

等号成立当且仅当 G 是正则图或是一个只有两种度的图,其中点的度或为 δ 或 $n-1$

引理和主要结论

收稿日期:2006—12—22

作者简介:李树栋(1979—),男,山东诸城人,助教

引理 1^[6] 对于连通图 G ,我们有 $\lambda(G) \leq \mu(G)$,等号成立且仅当 G 是偶图.

引理 2 设 G 是一个简单连图,则 $\rho(G) \leq \frac{1}{2} \mu(G)$,等号成立当且仅当 G 是正则图.

证明:令 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in R^n$ 是属于 $\rho(G)$ 的单位向量, $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^t \in R^n$ 是属于 $\mu(G)$ 的单位向量.

首先,我们证明 $\rho(G) \leq \frac{1}{2} \mu(G)$.因为 $\mu(G) = X'^t (D + A) X' = \sum_{v_i: v_j, i < j} (x'_i + x'_j)^2$,而 $\rho(G) = X^t A X = \sum_{v_i: v_j, i < j} 2x_i x_j \leq \frac{1}{2} = \sum_{v_i: v_j, i < j} (x'_i + x'_j)^2 \leq \sum_{v_i: v_j, i < j} (x'_i + x'_j)^2 = \frac{1}{2} \mu(G)$,因此我们得到想要的等式.其次,若不等式等号成立,即 $\rho(G) = \sum_{v_i: v_j, i < j} (x'_i + x'_j)^2 \leq \sum_{v_i: v_j, i < j} (x'_i + x'_j)^2$.又 $2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2$,所以当 v_i 与 v_j 相邻时,必有 $x_i = x_j$,故 X 是全一向量的倍数.由 $AX = PX$,我们得到 G 一定是正则的.反之,也容易验当 G 是正则图,等号成立.

引理 3 设 G 是一个简单连通图,则 $\mu(G) \leq \max_{u \in V} \frac{1}{2} (d_u + \sqrt{d_u^2 + 8d_u m_u})$,等式成立当且公当 G 是正则图

证明: 一方面,令 $x = (x_v, v \in V)$ 是一个单位向量,使 $\mu_x = Qx$,则 $\mu^2 x = Q^2 x$,对于 $u \in V$ 满足 $x_u = \max_{u \in V} \frac{d_u + \sqrt{d_u^2 + 8d_u m_u}}{2}$, $\mu_x u = d_u m_u + \sum_{v: u} x_v = \sum_{v: u} (x_v + x_u)$.

令 $A^2 = (b_w)$,其中 $b_w = |N_u \cap N_v|$ (当 $u \neq v$ 且 $b_w = d_v$ 或者 $u = v$).因此我们有

$$\mu(G)^2 x_u = [(D + A)^2 x]_u = [(D^2 + AD + DA + A^2) x]_u = d_u^2 x_u + \sum_{v: u} d_u x_v + \sum_{v: u} d_v x_v + \sum_{v \in V} b_w x_v = d_u^2 x_u - d_u (d_u - \mu(G)) x_u +$$

$$\sum_{v,u} d_v x_v + \sum_{v \in V} b_{uv} x_v = \mu(G) d_u x_u + \sum_{v,u} d_v x_v + \sum_{v \in V} b_{uv} x_v \leq \mu(G) d_u x_u + \sum_{v,u} d_v x_u + \sum_{v \in V} b_{uv} x_u = \mu(G) d_u x_u + d_u m_u x_u + d_u m_u x_u = \mu(G) d_u x_u + 2 d_u m_u x_u$$

又因为由著名的 Perron－Frobenius 定理, x_u 为正数, 我们 $\mu(G)^2 - \mu(G) d_u - 2 d_u m_u \geq 0$, 故得出结论

另一方面, 为使上述等式成立, 上面所有不等式都应应为等式, 即对于任意的 $v \in N_u$, $x_v = x_u$ 和任意的 $v \in V$, $x_v = x_u$, 因此 x 是全 1 向量的倍数, 由 $\mu x = Qx$, 我们有, 对于任意的 $v \in V$, $\mu = 2 d_v$, 因此 G 一定是正则的, 反之, 若 G 是正则的, 容易验证等号成立.

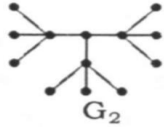
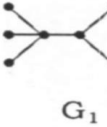
定理 4 设 G 是一个简单连通图, 则

$$\rho(G) \leq \max_{u \in V} \frac{d_u + \sqrt{d_u^2 + 8 d_u m_u}}{4} \tag{4}$$

等号成立当且仅当 G 是正则偶图.

证明: 可由引理 2 和 3 得出结论.

推理 5 设 G 是一个简单连通图, 则 $\lambda(G) \leq \max_{u \in V} \frac{d_u + \sqrt{d_u^2 + 8 d_u m_u}}{2}$, 等



号成立当且仅当 G 是正则偶图.

证明: 由引理 1 和 7 可得出结论.

最后我们给两个例子来说明, 在一定情况下, 我们的结果比已有的结果要好. 令 G_1 和 G_2 是如上图所示的两个图.

	ρ	(1)	(2)	(3)	(4)
G_1	2.450	3.464	3.505	3.317	3.000
G_2	2.330	3.464	2.449	3.464	3.431

上表说明, 在特定情况下, 我们得出的结果是好的.

参考文献:

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Mury. Graph Theory with Applications [M]. New York, Macmilan Press, 1976.
[2] A. Berman, X. D. Zhang. On the spectral radius of graphs with cut vertices[J]. J. Combin. Theory B83(2001) 233—240.
[3] Y. Hong, J. L. Shu, K. F. Fang. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs[J]. J. Combin. Theory B81(2001): 177—183.
[4] D. S. Cao. Bounds on the eigenvalues and chromatic number [J]. Linear Algebra Appl. 270(1998): 1—13.
[5] K. ch. Das. An improved upper bound for the Laplacian graph eigenvalues[J]. Linear Algebra Appl. 368(2003): 269—278.
[6] J. L. Shu, Y. Hong, K. Wen—Ren. A sharp upper bound on the largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph[J]. Linear Algebra Appl. 347(2002) 123—129.
[7] J. L. Shu, Y. R. Wu. Sharp upper bound on the spectral radius of graphs[J]. Linear Algebra Appl. 377(2004): 241—248.

A New Upper Bound on the Spectral Radius of Graphs

LI Shu-dong, FENG Li-hua

(College of Mathematics, Shandong Institute of Business and Technology, Shandong, Yantai 264005, China)

Abstrat: based ou previous results, A new upper bound on the spectral radius of graphs has been gotten by us, and what the giving examples shows is that the new upper bound is better in some situations.

key words: graph; matching number; spectral radius