文章编号:1005-0523(2007)01-0165-03

有负顾客的M/G/1重试可修排队系统的极限分布

刘 娟

(广东金融学院,广东 广州 510521)

摘要:利用马尔可夫骨架过程和Doob骨架过程及其极限理论,主要给出了有负顾客的M/G/1重试可修排队系统队长的极限分布.

关 键 词:系统;分布;马尔可夫骨架过程;负顾客;排队

中图分类号:O226 **文献标识码**:A

1 模型的假设

文中主要考虑的有负顾客的M/G/1重试可修的排队系统是这样的一个排队系统,假设

(1) 到达系统的顾客有两类:正顾客和负顾客.正顾客包括新到达的顾客和重试的顾客,新顾客到达时间间隔相互独立同分布,且服从参数为 λ 的负指数分布;负顾客的到达时间间隔相互独立同分布,且服从参数为 $\overline{\lambda}$ 的负指数分布.

(2) 单服务器,先到先服务,服务时间的分布函数是 $B(t)$.

(3) 正顾客(包括新到达的和重试的)到达系统时,若发现服务器空闲,则立即接受服务,服务接受后立即离开系统;若发现服务器正处于工作状态或处于修理状态,则进入Orbit中,不断进行重试,直到重试成功.重试时间服从参数为 δ 的负指数分布.

(4) 负顾客到达系统时,若发现服务器处于空闲或工作状态,他使得服务器马上进入修理状态后立即消失,同时带走全部正顾客(包括正在服务的顾客);若发现服务器处于修理状态,负顾客不对系统造成任何影响.

(5) 修理时间服从参数为 $\overline{\lambda}$ 的负指数分布的分布函数是 $G(t)$.服务器发生故障后立即进行修理,修理完毕服务器立即进入空闲状态,等待顾客的到来.

(6) 以上各随机变量相互独立.系统称为.

在文[1]中,已详细讨论了这种系统负顾客(如病毒)只带走正在服务的顾客的情况下系统稳定的充要条件、稳态解以及各指标的求解,对负顾客带走全部正顾客的情况没有进行讨论.在系统初始条件为一般的情况下,此文利用马尔可夫骨架过程理论讨论该系统在负顾客带走全部正顾客的情况下系统的瞬时分布和极限性态.

2 主要引理

引理2.1[2] 设 $X=\{X(t),t\geqslant0\}$ 是以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架是序列的正规的马尔可夫骨架过程,有 $P(x,t,A)=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t(\sum_{n=1}^{\infty}q^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)h(y,t-s,A)\ x\in E,t\geqslant0,A\in\varepsilon$.从而 $P(x,t,A)$ 是如下非负方程的最小非负解:

$$P(x,t,A)=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)P(y,t-s,A)\ x\in E,t\geqslant0,A\in\varepsilon$$

引理2.2[3] 设 $X(t)$ 是正常返的Doob骨架过程,若极限 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t,x,A)$ 存在,则极限分布 $P(A)(A\in\varepsilon)$ 存在,且等于广义极限分布 $\Pi(A)(A\in\varepsilon)$:$P(A)=\Pi(A)=$

$$\frac{\int_0^{\infty}\int_E h(y,t,A)\pi(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t}{\int_0^{\infty}t\mathrm{d}F(t)}$$

3 主要结论

令 $N(t)$ 为在 t 时刻Orbit中正顾客数的人数;

$$C(t)=\begin{cases}0,\text{在时刻 } t \text{ 服务器处于空闲状态;}\\1,\text{在时刻 } t \text{ 服务器正在为正顾客服务;}\\2,\text{在时刻 } t \text{ 服务器处于修理状态;}\end{cases}$$

$$\theta(t)=\begin{cases}0,\text{若 } C(t)=0\\\text{逝去的服务时间,若 } C(t)=1;\\\text{逝去的修理时间,若 } C(t)=2.\end{cases}$$

收稿日期:2006-12-28

作者简介:刘娟(1979-),女,江西高安人,广东金融学院应用数学系,硕士,研究方向:排队论.

以 B 表示 $IR^{+}=[0,\infty]$ 上所有的 Borel 集的全体，$\tau_0\equiv 0,\tau_1,\tau_2,\cdots$ 为的一系列相继断点(即在时刻 τ_n 有一顾客到达、或有一顾客被服务完而离去、或服务器刚好修理完毕、或前一事件与后两事件之一在时刻 τ_n 同时发生)．显然有 $\tau_n\uparrow+\infty,(n\uparrow+\infty)$

易知，$(C(t),N(t),\theta(t))$ 是一马尔可夫过程，也是一个以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为马尔可夫骨架时序列的马尔可夫骨架过程．

3.1 (C(t)，N(t)的瞬时分布

令 $\sigma=\inf\{t\mid C(t)=2,N(t)=0\}$，即从 $t=0$ 开始第一个负顾客到达时刻；$\delta_n=\tau_n\Lambda\sigma\quad n=1,2,\cdots$

$h_{kl}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)=P(C(t)=l,N(t)=j,\theta(t)\in A,t<\delta_1\mid C(0)=k,N(0)=i,\theta(0)=\theta)$

$h_{kl}(i,\theta,j,A,t)=P(C(t)=l,N(t)=j,\theta(t)\in A,t<\sigma\mid C(0)=k,N(0)=i,\theta(0)=\theta)$

其中 $k,l=0,1,2.$

令 $B_\theta(t)=\dfrac{B(\theta+t)-B(\theta)}{1-B(\theta)}\quad G_\theta(t)=\dfrac{G(\theta+t)-G(\theta)}{1-G(\theta)}$

于是有

$$h_{00}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}I_{\{0\}}(\theta) & j=i=0\\ e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})t}I_{(0)}(\theta) & j=i\neq 0\end{cases}$$

$$h_{11}^{(1)}(i,\theta,j,t)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}I_{\{A\}}(\theta+t)(1-B_\theta(t)) & j=i=0\\ e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})t}I_{(A)}(\theta+t)(1-B_\theta(t)) & j=i\neq 0\end{cases}$$

$$h_{22}^{(1)}(i,\theta,j,t)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}I_{\{A\}}(\theta+t)(1-G_\theta(t)) & j=i=0\\ e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})t}I_{(A)}(\theta+t)(1-G_\theta(t)) & j=i\neq 0\end{cases}$$

$h_{kl}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)=0,k\neq l$

定理 3.1.1 $\{h_{kl}(i,\theta,j,A,t),k,l=0,1,2\}$ 是下列非负线性方程的最小非负解：

1) 当 $\sigma=\tau_1$ 时，$h_{kl}(i,\theta,j,A,t)=h_{kl}^{(1)}(i,\theta,j,A,t),k,l=0,1,2.$

2) 当 $\sigma\neq\tau_1$ 时，(ⅰ) $i=0$ 的情形

$$h_{0l}(0,\theta,j,A,t)=h_{0l}^{(1)}(0,\theta,j,A,t)+\lambda\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}h_{1l}(0,0,j,A,t-s)\mathrm{d}s$$

$$h_{1l}(0,\theta,j,A,t)=h_{1l}^{(1)}(0,\theta,j,A,t)+\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}dB_\theta(s)\,h_{0l}(0,0,j,A,t-s)+\lambda\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}(1-B_\theta(s))\,h_{1l}(1,\theta+s,j,A,t-s)\mathrm{d}s$$

$$h_{2l}(0,\theta,j,A,t)=h_{2l}^{(1)}(0,\theta,j,A,t)+\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}dG_\theta(s)\,h_{0l}(0,0,j,A,t-s)+\lambda\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}(1-G_\theta(s))\,h_{2l}(1,\theta+s,j,A,t-s)\mathrm{d}s$$

(ⅱ) $i>0$ 的情形：

$$h_{0l}(i,\theta,j,A,t)=h_{0l}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)+\lambda\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+i\delta)s}h_{1l}(i,0,j,A,t-s)\,ds+i\delta\int_0 e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+i\delta)s}h_{1l}(i-1,0,j,A,t-s)\mathrm{d}s$$

$$h_{1l}(i,\theta,j,A,t)=h_{1l}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)+\int_0 e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}\mathrm{d}B_\theta(s)\,h_{0l}(i,0,j,A,t-s)+\lambda\int_0 e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-B_\theta(s))\,h_{1l}(i+1,\theta+s,j,A,t-s)\,ds+i\delta\int_0 e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-B_\theta(s))\,h_{1l}(i,\theta+s,j,A,t-s)\mathrm{d}s$$

$$h_{2l}(i,\theta,j,A,t)=h_{2l}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)+\int_0 e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}\mathrm{d}G_\theta(s)\,h_{0l}(i,0,j,A,t-s)+\lambda\int_0 e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-G_\theta(s))\,h_{2l}(i+1,\theta+s,j,A,t-s)\mathrm{d}s+i\delta\int_0 e^{-\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-G_\theta(s))\,h_{2l}(i,\theta+s,j,A,t-s)\mathrm{d}s$$

证明： 显然，$(C(t),N(t),\theta(t);t<\sigma)$ 是一个马尔可夫过程，也是以 $(\delta_n,n\geqslant 1)$ 为骨架时序列的正规的马尔可夫骨架过程，于是引理 2.1 得此定理成立．

令 $m_{kl}(i,\theta,j,A)=\displaystyle\int_0^\infty h_{kl}^{(1)}(i,\theta,j,A,t)\mathrm{d}t$

$M_{kl}(i,\theta,j,A)=\displaystyle\int_0^\infty h_{kl}(i,\theta,j,A,t)\mathrm{d}t$

$m_{kl}(i,\theta,j,A)=E(I_{\{l\}}(C(t))I_{\{j\}}(N(t))\cdot I_{\{A\}}(\theta)I_{[0,t)}(\delta_1)\mid C(0)=k,N(0)=i,\theta(0)=\theta)$

$M_{kl}(i,\theta,j,A)=E(I_{\{l\}}(C(t))I_{\{j\}}(N(t))\cdot I_{\{A\}}(\theta)I_{[0,t)}(\sigma)\mid C(0)=k,N(0)=i,\theta(0)=\theta)$

显然 $m_{kl}(i,\theta,j,A)=0\quad k\neq l$

$$m_{00}(i,\theta,j,A)=\begin{cases}0 & j\neq \mathrm{i}\\ \dfrac{1}{\lambda+\bar{\lambda}}I_0(\theta) & j=i=0\\ \dfrac{1}{\lambda+i\delta+\bar{\lambda}}I_{\{0\}}(\theta) & j=i\neq 0\end{cases}$$

$$m_{11}(i,\theta,j,A)=\begin{cases}0 & j\neq \mathrm{i}\\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}I_{\{A\}}(\theta+t)(1-B_\theta(t))\mathrm{d}t & j=i=0\\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})t}I_{\{A\}}(\theta+t)(1-B_\theta(t))\mathrm{d}t & j=i\neq 0\end{cases}$$

$m_{22}(i,\theta,j,A)=$

$$\begin{cases} 0 & j \neq i \\ \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t} I_{\{A\}}(\theta+t)(1-G_\theta(t))\mathrm{d}t & j=i=0 \\ \int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})t} I_{\{A\}}(\theta+t)(1-G_\theta(t))\mathrm{d}t & j=i\neq 0 \end{cases}$$

定理3.1.2　$\{M_{kl}(i,\theta,j,A),k,l=0,1,2\}$是下列非负线性方程的最小非负解:

1) 当 $\sigma=\tau_1$ 时,$M_{kl}(i,\theta,j,A)=m_{kl}(i,\theta,j,A)$,$k,l=0,1,2$.

2) 当 $\sigma\neq\tau_1$ 时,(ⅰ) $i=0$ 的情形:$M_{0l}(0,\theta,j,A)=m_{0l}(0,\theta,j,A)+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}}M_{1l}(0,0,j,A)$

$$M_{1l}(0,\theta,j,A)=$$
$$m_{1l}(0,\theta,j,A)+\int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}\mathrm{d}B_\theta(s)M_{0l}(0,0,j,A)$$
$$+\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}(1-B_\theta(s))M_{1l}(1,\theta+s,j,A)\mathrm{d}s$$

$$M_{2l}(0,\theta,j,A)=$$
$$m_{2l}(0,\theta,j,A)+\int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}\mathrm{d}G_\theta(s)M_{0l}(0,0,j,A)$$
$$+\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})s}(1-G_\theta(s))M_{2l}(1,\theta+s,j,A)\mathrm{d}s$$

(ⅱ) $i>0$ 的情形:

$$M_{0l}(i,\theta,j,A)=m_{0l}(i,\theta,j,A,t)+\frac{\lambda}{\lambda+i\delta+\bar{\lambda}}M_{1l}(i,0,j,A)+\frac{i\delta}{\lambda+i\delta+\bar{\lambda}}M_{1l}(i-1,0,j,A)$$

$$M_{1l}(i,\theta,j,A)=$$
$$m_{1l}(i,\theta,j,A)+\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}\mathrm{d}B_\theta(s)M_{0l}(i,0,j,A)+$$
$$\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-B_\theta(s))M_{1l}(i+1,\theta+s,j,A)\mathrm{d}s+$$
$$i\delta\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-B_\theta(s))M_{1l}(i,\theta+s,j,A)\mathrm{d}s$$

$$M_{2l}(i,\theta,j,A)=$$
$$m_{2l}(i,\theta,j,A)+\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}\mathrm{d}G_\theta(s)M_{0l}(i,0,j,A)+$$
$$\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-G_\theta(s))M_{2l}(i+1,\theta+s,j,A)\mathrm{d}s+$$
$$i\delta\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\delta+\bar{\lambda})s}(1-G_\theta(s))M_{2l}(i,\theta+s,j,A)\mathrm{d}s$$

证明:　由定理3.1.1和 $M_{kl}(i,\theta,j,A)$,$m_{kl}(i,\theta,j,A)$的定义即得本定理.

3.2　统计平衡理论

令 $T_0=0$,T_n 表示$(C(t),N(t),\theta(t))$第 n 次回到状态$(2,0,0)$的时刻,即第 n 个负顾客到达的时刻.显然,$(C(t),N(t),\theta(t))$是以$\{T_n\}_{n=0}^\infty$为骨架时序列的 *Doob* 骨架过程.

定理3.2(1)　若 $\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)=\frac{1}{\lambda}<\infty$,则 $P\{T_1<\infty\mid C(0)=2,N(0)=0,\theta(0)=0\}=1$;

(2)当且仅当 $\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)=\frac{1}{\lambda}<\infty$时,这时$(C(t),N(t),\theta(t))$存在广义极限分布 $\Pi(\cdot)$,且

$$\Pi_{2l}(j,A)=\frac{M_{2l}(0,0,j,A)}{\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)}=\bar{\lambda}M_{2l}(0,0,j,A)$$

其中 $M_{2l}(0,0,J,A)$由定理3.1.2决定,且 $\Pi(\cdot)$是$(C(t),N(t),\theta(t))$唯一的概率不变测度.

(3) 当$\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)=\frac{1}{\lambda}<\infty$时,$(C(t),N(t),\theta(t))$ 是以$\{T_n\}_{n=0}^\infty$为马尔可夫骨架序列的正常返的Doob骨架过程,所以存在极限分布 $P(\cdot)$,且等于广义极限分布 $\Pi(\cdot)$,即

$$\lim_{t\to\infty}P_{kl}(i,\theta,j,A,t)=\Pi_{2l}(j,A)$$
$$=\bar{\lambda}M_{2l}(0,0,j,A)$$

证明:　由引理2.3,以及引理2.5即得此定理.

此外,若给定分布函数具体的参数和系统初始条件,则可利用数值计算可得系统的各指标值.

参考文献:

[1]武慧玲,尹小玲.有单移除策略的M/G/1重试可修排队系统[J].中山大学学报(自然科学版),2005,44(21):133—137.

[2] Hou Zhenting ,Liu Zaiming ,Zou Jiezhong . Markov Skeleton Processes[J]. Chinese Science Bulletin ,1998,43(11):881—886.

[3]侯振挺,刘国欣,袁成桂,等.马尔可夫骨架过程及其在排队论中的应用[M].北京:科学出版社,2005.

The Limiting Distribution of the Length for a Kind of M/G/1 Retrial Queue with Negative Customers and Repair

LIU Juan

(Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521,China)

Abstract:Applying the Markov skeleton processes and Doob skeleton processes and interrelated limit theories, the limiting distribution of the length with negative customers and repair are presented

Key words:system; distribution; markov skeleton processes; customers;queue