文章编号:1005-0523(2007)02-0143-03

一类序压缩减算子新不动点定理及其应用

盛梅波[1],左黎明[1,2]

(1.华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013;2.江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究了在序压缩条件下非紧减算子的不动点的存在性,得到了新的不动点定理,并给出了一个应用的例子.

关 键 词:半序;减算子;锥;不动点.

中国分类号:O177.91 **文献标识码**:A

1 基本概念

以下总假定 E 是一个实Bancah空间,P 是 E 是正规锥,半序"$\leqslant$"是由锥 P 诱导的.

定义1[1] 设非空集合 $D\subset E$,算子 $A:D\rightarrow E$ 称为减算子,如果

$$\forall x,y\in D,x\leqslant y\Rightarrow Ay\leqslant Ax.$$

定义2[1] 设 $A:D\rightarrow E$ 上的算子,如果存在 $x^*\in D$,使得 $Ax^*=x^*$,则称 x^* 是算子 A 在 D 上的一个不动点.

2 主要结果

定理1 设 E 为实Bancah空间,P 是 E 中正规锥,$A:P\rightarrow P$ 为 P 上的减算子且满足:

$$\forall\ \theta\leqslant x\leqslant y,Ax-Ay\leqslant L(y-x),0<L<1,$$

若存在 $v_0\in P,v_0\leqslant Av_0$,则存在 $\bar{x}$,使得 $A\bar{x}=\bar{x}$.

证明 因为 $Av_0-A^2v_0\leqslant L(Av_0-v_0)$,故

$$A^2v_0-v_0=A^2v_0-Av_0+Av_0-v_0=(Av_0-v_0)-(Av_0-A^2v_0)\geqslant(1-L)(Av_0-v_0)\geqslant\theta$$

所以 $v_0\leqslant A^2v_0\leqslant Av_0$

定义迭代关系:

$$v_n=Av_{n-1}(n=1,2,\cdots)$$

由归纳法,易证:$\theta\leqslant v_0\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_{2n}\leqslant\cdots\leqslant v_{2n+1}\leqslant\cdots\leqslant v_3\leqslant v_1$.故 $\{v_{2n}\}_{n=0}^{\infty}\{v_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ 按序有界.

由于 $\forall\ \theta\leq x\leq y,\theta\leqslant Ay\leqslant Ax,Ax-Ay\leqslant L(y-x)$ 所以

$$A^2y-A^2x\leqslant L(Ax-Ay)\leqslant L^2(y-x),$$

令 $K=L^2$,则 $0<K<1$,A^2 为序压缩算子.

$\forall\ n\geqslant0$,有

$$\theta\leqslant v_{2n+1}-v_{2n}=A^2v_{2n-1}-A^2v_{2n-2}\leqslant K(v_{2n-1}-v_{2n-2})\leqslant K^2(v_{2n-3}-v_{2n-4})\leqslant\cdots\leqslant K^n(v_1-v_0)$$

收稿日期:2006-02-16

基金项目:江西省自然基金资助项目(0611009),江西省教育厅资助项目(编号:赣教技字[2006]123号)

作者简介:盛梅波(1966-),男,江西鄱阳人,理学硕士,副教授,主要研究方向:非线性泛函分析.

故：$\theta \leqslant v_{2n+1} - v_{2n} \leqslant L^{2n}(v_1 - v_0)$ (1)

由于 P 正规，存在常数 $N>0$，使得：$\| v_{2n+1} - v_{2n} \| \leqslant NL^{2n} \| v_{1-v_0} \|$，$0<L<1$，

当 $n \to \infty$ 时，

$\| v_{2n+1} - v_{2n} \| \to 0$. $\theta \leq v_{2n+1} - v_{2n} = A^2 v_{2n-3} - A^2 v_{2n-2} \leq K^2(v_{2n-5} - v_{2n-4}) \leq \cdots \leq K^{n-1}(v_1 - v_2)$

因为 $K = L^2$，所以 $\quad k^{n-1}(v_1 - v_2) = k^{n-1}(Av_0 - Av_1) = L^{2n-2}(Av_0 - Av_1) \leqslant k^{2n-1}(v_1 - Av_0)$

故
$$\theta \leqslant v_{2n-1} - v_{2n} \leqslant L^{2n-1}(v_1 - v_0) \tag{2}$$

同样由于 P 正规，存在常数 $N>0$，使用 $\| v_{2n-1} - v_{2n} \| \leqslant NL^{2n-1} \| v_1 - v_0 \|$，$0<L<1$，

当 $n \to \infty$ 时，$\| v_{2n-1} - v_{2n} \| \to 0$.

$$\| v_{n+p} - v_n \| \leqslant \| v_{n+p} - v_{n+p+1} \| + \| v_{n+p-1} - v_{n+p-2} \| + \cdots + \| v_{n+1} - v_n \| \tag{3}$$

若 $n = 2k$，$p = 2l$，则(3)式为：

$$\| v_{2k+2l} - v_{2k} \| \leqslant \| v_{2k+2l} - v_{2k+2l-1} \| + \| v_{2k+2l-1} - v_{2k+2l-2} \| + \cdots + \| v_{2k+1l} - v_{2k} \|$$
$$\leqslant (NL^{2K+2L-1} + NL^{2K+2L-2} + NL^{2K+2L-3} + \cdots + NL^{2K}) \| v_1 - v_0 \|$$
$$\leqslant (L^{2L-1} + L^{2L-2} + \cdots + 1) NK^{2k} \| v_1 - v_0 \|$$

注意到当 $L<1$，$L^{2L-1} + L^{2L-1} + \cdots + 1 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} = \frac{1}{1-L}$，所以当 $n = 2k \to \infty$，

$$\| v_{2k+2l} - v_{2k} \| \leqslant \frac{1}{1-L} NL^{2k} \| v_1 - v_0 \| \to 0 \tag{4}$$

同理可证当 $n = 2k+1$，$p = 2l+1$ 或者 $n = 2k+1$，$p = 2l$ 或者 $n = 2k$，$p = 2l+1$，$n \to \infty$，均有：

$$\| v_{n+p} - v_n \| \to 0$$

故任意给定正整数的 n, p，当 $n \to \infty$ 时，$\| v_{n+p} - v_n \| \to 0$，$\{v_n\}$ 为 P 中 Cauchy 列，所以存在 $\bar{x} \in P$，使得 $v_n \to \bar{x}$.

$$\| A\bar{x} - \bar{x} \| \leqslant \| A\bar{x} - v_n \| + \| v_n - \bar{x} \| = \| A\bar{x} - Av_{n-1} \| + \| v_n - \bar{x} \|$$
$$\leqslant N \| \bar{x} - v_{n-1} \| + \| v_n - \bar{x} \|.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} \| A\bar{x} - \bar{x} \| = 0$.

故存在 $\bar{x}$，使得 $A\bar{x} = \bar{x}$，即 A 有一不动点.

定理 2 设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中正规锥，$A: P \to P$ 为 P 上的减算子且满足：

$\forall\, \theta \leqslant x \leqslant y$，$Ax - Ay \leqslant L(y - x)$，$0<L<1$，

若存在 $v_0 \in P$，$v_0 \geqslant Av_0$，则存在 $\bar{x}$，使得 $A\bar{x} - \bar{x}$.

证明 同定理 1 类似证明.

3 应用

考察信号与系统中的一个非线性压制干扰信道中的信号传输函数是否具有自反馈稳定特征(即输出信号再反馈到输入中是否具有最终信号的平稳性). 若假设信号周期为 1，我们只需考察一个周期内的情形. 信号空间为 $C[0,1]$，信号传输函数(只考察实数形式)为：

$$Ax(t) = \frac{1}{2\pi + x(t)} - \frac{\pi^2}{16}\int_0^1 (s^2 + t^2)\frac{1 + x(t)s^2}{2\pi M} \mathrm{d}s,$$

其中 M 为某个正整数，取 $P = \{x(t) \mid x(t) \geqslant 0, \forall\, t \in [0,1]\}$，易知 P 为正规锥，A 为减算子，

令 $x_1(t) \leqslant x_2(t)$，则

$$Ax_1(t) \leqslant Ax_2(t) = \frac{1}{2\pi + x_1(t)} - \frac{\pi^2}{16}\int_0^1 (s^2 + t^2)\frac{1 + x_1(t)s^2}{2\pi M}\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi + x_2(t)} + \frac{\pi^2}{16}\int_0^1 (s^2 + t^2)\frac{1 + x_2(t)s^2}{2\pi M}\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2\pi + x_1(t)} - \frac{1}{2\pi + x_2(t)} + \frac{\pi^2}{16}\int_0^1 (s^2 + t^2)\left[\frac{1 + x_2(t)s^2}{2\pi M} - \frac{1 + x_1(t)s^2}{2\pi M}\right]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{x_2(t)-x_1(t)}{[2\pi+x_1(t)][2\pi+x_2(t)]}+\frac{\pi^2}{16}\int_0^1(s^2+t^2)\frac{[x_1(t)-x_2(t)]s^2}{2\pi M}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\frac{x_2(t)-x_1(t)}{12}+\frac{x_2(t)-x_1(t)}{\pi M}$$

因为 $M\geqslant 1$，故 $Ax_1(t)-Ax_2(t)\leqslant(\frac{1}{12}+\frac{1}{3})[x_2(t)-x_1(t)]=\frac{5}{12}[x_2(t)-x_1(t)]$.

若存在 $\theta\leqslant x_0(t)\leqslant Ax_0(t)$，则满足定则 1 中所有条件，由定理 1，存在 $\bar{x}(t)=A\bar{x}(t)$，即该函数具有自反馈稳定特征.

参考文献：

[1] 郭大钧.非线性分析半序方法[M].山东：山东科技出版社，2000，35－37.

[2] 盛梅波.一类减算子新的不动点定理及其应用[J].南昌大学学报(理科版)，2005，(1)：59－62.

[3] 朱传喜.关于减算子的正不动点定理[J].工科数学，1997，(3)：193－196.

[4] 李福义，冯锦锋，沈沛龙.一类减算子的不动点定理及其应用[J].数学学报，1999，(2).

New Fixed Point Theorems for Order－Compression Decreasing Operators and Applications

SHENG Mei-bo[1], **ZUO Li-ming**[1,2]

(1.School of Natural Science, East China Jiaotong Uni., Nanchang 330013,
2.Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal Uni., Nanchang 330022, China)

Abstract: The existence of fixed point for some class of order－compression decreasing operators is studied, and some existence and uniqueness theorems are obtained. Finally, we give an example of application.

Key words: partial order; decreasing operator; cone; fixed point.