第 24 卷第 2 期
2007 年 4 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.24 No.2
Apr.,2007

文章编号:1005－0523(2007)02－0146－02

第二类 stirling 数的又一个恒等式

吴跃生

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:证明一些恒等式,并给出了当 n≥10 时的第二类 stirling 数 $S_2(n,n-5)$ 的计算公式.

关 键 词:非空子集合;组合;第二类 stirling 数.

中图分类号:O157 **文献标识码**:A

在我们表述的主要结果之前,首先给出一些定义和符号.

定义 1 从 n 个不同事物中每次取出 m 个的组合数,记作 $C(n,m)$

定义 2 把含有 n 个元素的一个集合分成恰好有 r 个非空子集合的分拆数目就叫做第二类 stirling 数,并记作 $S_2(n,r)$,对于 $n=r=0$,我们定义 $S_2(0,0)=1$ 及 $n<r$,$S_2(n,r)=0$.

例如:x＝{a,b,c,d}是 4 个元素的集合,将 x 分成两个非空子集的方法有 7 种,即{a}∪{b,c,d},{b}∪{a,c,d},{c}∪{a,b,d},{d}∪{a,b,c}{a,b}∪{c,d},{a,c}∪{b,d},{a,d}∪{b,c},因此 $S_2(4,2)=7$.

对于集合 x,我们用|x|表示 x 的基数.

引理 1 当 $n\geqslant 1$ 时,$S_2(n,0)=0$,$S_2(n,1)=1$,$S_2(n,2)=2^{n-1}-1$,$S_2(n,n-1)=S_2(n,2)$,$S_2(n,n)=1$.

引理 2 当 $n\geqslant 4$ 时,$S_2(n,n-2)=C(n,3)+3C(n,4)$,当 $n\geqslant 6$ 时,$S_2(n,n-3)=C(n,4)+10C(n,5)+15C(n,6)$

引理 1 及引理 2 的证明在[1]里可以找到,文[2]的主要结论是:

当 $n\geqslant 8$ 时,$S_2(n,n-4)=C(n,5)+25C(n,6)+105C(n,7)+105C(n,8)$

我们的主要结论是:

定理 1 当 $n\geqslant 10$ 时,

$S_2(n,n-5)=C(n,6)+56C(n,7)+490C(n,8)+1260C(n,9)+945C(n,10)$

证 设 A 是含有 n 个元素的集合,当 $n\geqslant 10$ 时,按照 $S_2(n,n-5)$ 的定义,我们有下面 5 种不同情况分拆方法.

(Ⅰ)$A=\bigcup_{i=1}^{n-5}A_i$ 这里 $A_i(1\leqslant i\leqslant n-5)$ 满足:(1) $A_i\bigcap_{i\neq j}A_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n-5)$;(2) $|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{n-6}|=1$,且 $|A_{n-5}|=6$,我们从 A 中取出 A_{n-5} 的方法为 $C(n,6)$ 个分拆数.

(Ⅱ)$A=\bigcup_{i=1}^{n-5}B_i$ 这里 $B_i(1\leqslant i\leqslant n-5)$ 满足(1) $B_i\bigcap_{i\neq j}B_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n-5)$;(2) $|B_1|=|B_2|=\cdots=|B_{n-7}|=1$,$|B_{n-6}|\geqslant 2$,$|B_{n-5}|\geqslant 2$,并且 $|B_{n-6}\cup B_{n-5}|=7$.

我们从 A 中取出 7 个元素的方法有 $C(n,7)$ 种,而 7 个元素分成两部分的分拆数为 $S_2(7,2)$,并且每一部分至少有一个元素.将 7 个元素分成两部分,一部分有 1 个元素而另一部分有 6 个元素,共有 $C(7,1)$ 种方法,因此,将 7 个元素分成两部分,使每部分至少有 2 个元素.这种方法共有 $S_2(7,2)-C(7,1)=(2^{7-1}-1)-7=56$ 种.因此在(Ⅱ)中,我们有分拆数 $56C(n,7)$.

(Ⅲ)$A=\bigcup_{i=1}^{n-5}C_i$ 这里 $C_i(1\leqslant i\leqslant n-5)$ 满足(1) C_i

收稿日期:2006－12－22
作者简介:吴跃生(1959－),男,江西瑞金人,华东交通大学副教授,硕士,研究方向:初等和高等数学.

$\bigcap\limits_{i\neq j}C_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n-5)$；(2) $|C_1|=|C_2|=\cdots=|C_{n-8}|=1$，$|C_{n-7}|\geqslant 2$，$|C_{n-6}|\geqslant 2$，$|C_{n-5}|\geqslant 2$，并且 $|C_{n-7}\cup C_{n-6}\cup C_{n-5}|=8$.

我们从 A 中取出 8 个元素的方法有 $C(n,8)$ 种，将 8 个元素分成 3 部分，使每部分至少有 2 个元素. 有两种方法，(1)先从 8 个元素中任取 4 个元素，取法为 $C(8,4)$，把其余 4 个元素分成两部分，使每部分有 2 个元素的分拆数为 $C(4,2)C(2,2)/2=3$(例如，设这 4 个元素为 a_1,a_2,a_3,a_4，分法即 $a_1a_2|a_3a_4$，$a_1a_3|a_2a_4$，$a_1a_4|a_2a_3$，共有 3 种分法)，因此将 8 个元素按此种方法分成 3 部分，使每部分至少有 2 个元素的分法有 $3C(8,4)=3\times 70=210$ 种；(2)先从 8 个元素中任取 2 个元素，取法为 $C(8,2)$，把其余的 6 个元素分成两部分，使每部分都有 3 个元素的分拆数为 $C(6,3)C(3,3)/2!=10$，因此将 8 个元素按此种方法分成 3 部分，使每部分至少有 2 个元素的分法有 $10C(8,2)=10\times 28=280$ 种. 故在(Ⅲ)中，我们有分拆数 $490C(n,8)$ 种.

(Ⅳ) $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n-5}D_i$ 这里 $D_i(1\leqslant i\leqslant n-5)$ 满足(1) $D_i\bigcap\limits_{i\neq j}D_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n-5)$；(2) $|D_1|=|D_2|=\cdots=|D_{n-9}|=1$，$|D_{n-8}|\geqslant 2$，$|D_{n-7}|\geqslant 2$，$|D_{n-6}|\geqslant 2$，$|D_{n-5}|\geqslant 2$，并且 $|D_{n-8}\cup D_{n-7}\cup D_{n-6}\cup D_{n-5}|=9$.

我们从 A 中取出 9 个元素的方法有 $C(n,9)$ 种，将 9 个元素分成 4 部分，使每部分至少有 2 个元素，可以这样做，先从 9 个元素中任取 3 个元素，取法为 $C(9,3)$，把其余的 6 个元素分成三部分，使每部分都有 2 个元素的分拆数为 $C(6,2)C(4,2)C(2,2)/3!=15$，有 $15C(9,3)=15\times 84=1260$ 种. 故在(Ⅳ)中，我们有分拆数 $1260C(n,9)$ 种.

(Ⅴ) $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n-5}E_i$ 这里 $E_i(1\leqslant i\leqslant n-5)$ 满足(1) $E_i\bigcap\limits_{i\neq j}E_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n-5)$；(2) $|E_1|=|E_2|=\cdots=|E_{n-10}|=1$，$|E_{n-9}|\geqslant 2$，$|E_{n-8}|\geqslant 2$，$|E_{n-7}|\geqslant 2$，$|E_{n-6}|\geqslant 2$，$|E_{n-5}|\geqslant 2$，并且 $|E_{n-9}\cup E_{n-8}\cup E_{n-7}\cup E_{n-6}\cup E_{n-5}|=10$.

由(1)和(2)，我们知道 $|E_{n-9}|=|E_{n-(}|=|E_{n-7}|=|E_{n-6}|=|E_{n-5}|=2$，从 A 中任取 10 个元素的方法共有 $C(n,10)$ 种，而将 10 个元素分成 5 部分，使每部分都有 2 个元素的分法有 $C(10,2)C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)/5!=945$ 种. 因此，在(Ⅴ)中，我们有分拆数 $945C(n,10)$ 种.

假设 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n-5}F_i$ 这里 $F_i(1\leqslant i\leqslant n-5)$ 满足(1) $F_i\bigcap\limits_{i\neq j}F_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n-5)$；(2) $|F_1|=|F_2|=\cdots=|F_{n-k}|=1$，$|F_{n-k+1}|\geqslant 2$，$|F_{n-k+2}|\geqslant 2,\cdots,|F_{n-5}|\geqslant 2$，且 $|\bigcup\limits_{i=n-k+1}^{n-5}F_i|=k$.

我们有 $n-k+2[n-5-(n-k)]>n$ 或 $5<k\leqslant 10$. 因此，只有以上 5 种情况存在，故根据加法原则将 A 分成 $n-5$ 个部分的分拆数为

$C(n,6)+56C(n,7)+490C(n,8)+1260C(n,9)+945C(n,10)$

因此　$S_2(n,n-5)=C(n,6)+56C(n,7)+490C(n,8)+1260C(n,9)+945C(n,10)$，故定理 1 得证.

参考文献：

[1]陈景润. 组合数学简介[M]. 天津：天津科学技术出版社，1988.

[2]杜春雨. 第二类 stirling 数的一个恒等式[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2004(5)：240—241.

Another Identity of Stirling Numbers of the Second Kind

WU Yue-sheng

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we prove some idendities. In particular, we determine the stirling number of the second kind $S_z(n,n-5)$, when $n.\geqslant 10$.

Key words: non—empty subset; combinations; stirling numbers of the second kind