

文章编号:1005—0523(2007)02—0148—03

用遗传算法求空间点列的最小包容球

王洪发

(浙江水利水电专科学校,浙江 杭州 310018)

摘要:建立了求空间点列包容球的数学模型,将求最小包容球问题转化为函数优化问题,并用遗传算法解决了函数最优解的求解问题.

关键词:空间点列;最小包容球;遗传算法
中图分类号:TP301.6 **文献标识码:**A

1 引言

在评价机械产品造形质量时,通常的办法是通过测量获得产品表面的坐标点列,然后根据这些坐标衡量造形误差,这就必然涉及包容理论.这方面的研究成果很多,但在生产实践中应用的不多.主要是因为建立定义容易,但从定义到其对应的几何优化模型,再到可实现的算法则较难.在实际工程中,经常要评价球面的造形误差,通常引入包容球的几何概念.显然一个空间点列有无数个包容球,如何求得最小的包容球呢?本文建立了求空间点列包容球的数学模型,将求最小包容球问题转化为函数优化问题,并用遗传算法解决了这个函数最优解的求解问题.

2 求包容球的数学模型

2.1 包容球的定义

若对已给定的空间点列 $\{P_i\}=\{(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, \dots, n\}$,存在球H,使得点 P_i 全部在球面上或球内,则称球H为空间点列的包容球.在所有包容球中,半径最小的包容球称为空间点列的最小包容球.为了叙述方便,下文的点列均指空间点列.

2.2 求最小包容球的数学模型

根据定义,对点列 $\{P_i\}$ 要想得到最小的包容球,

关键要确定球心 (a, b, c) 和半径 r ,使得:

$$\begin{cases} (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2 \leq r^2, i=1, 2, \dots, n \\ r \rightarrow \min \end{cases}$$

为此先引进点列包容长方体的概念,令:

$$\text{Max}X = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (x_i), \text{Min}X = \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (x_i)$$

$$\text{Max}Y = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (y_i), \text{Min}Y = \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (Y_i)$$

$$\text{Max}Z = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (z_i), \text{Min}Z = \text{Min}_{1 \leq i \leq n} (Z_i)$$

以 $(\text{Min}X, \text{Min}Y, \text{Min}Z)$ 、 $(\text{Min}X, \text{Max}Y, \text{Min}Z)$ 、 $(\text{Max}X, \text{Max}Y, \text{Min}Z)$ 、 $(\text{Max}X, \text{Min}Y, \text{Min}Z)$ 、 $(\text{Min}X, \text{Min}Y, \text{Max}Z)$ 、 $(\text{Min}X, \text{Max}Y, \text{Max}Z)$ 、 $(\text{Max}X, \text{Max}Y, \text{Max}Z)$ 、 $(\text{Max}X, \text{Min}Y, \text{Max}Z)$ 为顶点作长方体,很显然,点 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都在长方体内,称这样的长方体为点列 $\{P_i\}$ 的包容长方体.最小包容球与包容长方体有如下关系:

定理 设点列 $\{P_i\}$ 的最小包容球的半径为 r ,球心为 (a, b, c) ,则有:

$$(1) \quad r \leq$$

$$\frac{\sqrt{(\text{Max}X - \text{Min}X)^2 + (\text{Max}Y - \text{Min}Y)^2 + (\text{Max}Z - \text{Min}Z)^2}}{2} \\ r \geq \text{Max} (\text{Max}X - \text{Min}X, \text{Max}Y - \text{Min}Y, \text{Max}Z - \text{Min}Z) / 2$$

$$(2) \quad \text{Min}X \leq a \leq \text{Max}X, \text{Min}Y \leq b \leq \text{Max}Y, \text{Min}Z \leq c \leq \text{Max}Z$$

证明 (1) 作点列 $\{P_i\}$ 的包容长方体 $ABCD - A'B'C'D'$,如图1所示.

收稿日期:2006—10—16

(作者简介)王洪发(1957—),男,江西婺源人,教授,主要研究方向:计算机图形学、遗传算法。
(Copyright © 2007 China Academic Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net)

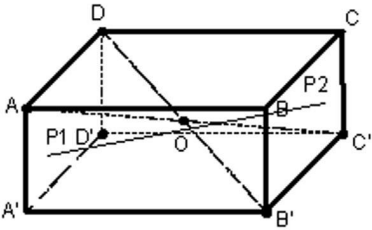


图 1 包容长方体 $ABCD-A'B'C'D'$

以包容长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 对角线交点 O 为球心, OA 为半径作球. 很显然, 这个球是点列的一个包容球, 所以最小包容球的半径

$$r \leq AC'/2 =$$

$\sqrt{(\text{Max}X - \text{Min}X)^2 + (\text{Max}Y - \text{Min}Y)^2 + (\text{Max}Z - \text{Min}Z)^2} / 2$.

另一方面, 包容长方体每个面上至少存在点列 $\{P_i\}$ 中的一个点, 设 P_1, P_2 分别在 $AA'D'D$ 和 $BB'C'C$ 上, 而 P_1, P_2 在最小包容球上或球内, 所以最小包容球的直径大于或等于 P_1P_2 , 从而 $r \geq P_1P_2/2 \geq AB/2 = (\text{Max}Y - \text{Min}Y)/2$. 同理可证, $r \geq BC/2 = (\text{Max}X - \text{Min}X)/2, r \geq AA'/2 = (\text{Max}Z - \text{Min}Z)/2$.

因此, $r \geq \text{Max}(\text{Max}X - \text{Min}X, \text{Max}Y - \text{Min}Y, \text{Max}Z - \text{Min}Z)/2$

(2) 用反证法. 假设最小包容球的球心 (a, b, c) 在包容长方体之外, 不妨假定在区域 I 或 II 内, 如图 2 所示.

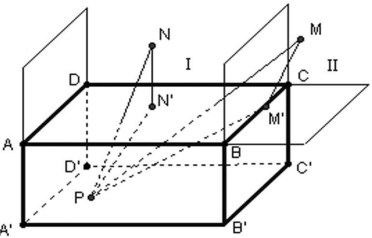


图 2 球心在包容长方体外

若最小包容球的球心 N 在区域 I 内, 作 $NN' \perp$ 平面 $ABCD$, N' 是垂足, 设 P 是点列 $\{P_i\}$ 中的任意一点, 由于 $\angle NN'P > \pi/2 > \angle PNN'$, 所以 $NP > N'P$.

令 $r_1 = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (NP_i), r_2 = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (N'P_i)$, 以 N 为球心, r_1 为半径或以 N' 为球心, r_2 为半径的球都是点列 $\{P_i\}$ 的包容球, 由于 $r_1 > r_2 \geq r$, 所以 N 不可能是最小包容球的球心.

若最小包容球的球心 M 在区域 II 内, 作 $MM' \perp BC$, M' 为垂足, 易证 $MP > M'P$. 令 $r_1 = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (MP_i), r_2 = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (M'P_i)$, 以 M 为球心, r_1 为半径或以 M' 为球心, r_2 为半径的球都是点列 $\{P_i\}$ 的包容球, 由于 $r_1 > r_2 \geq r$, 所以 M 也不可能是最小包容球

的球心.

因此, 最小包容球的球圆心 (a, b, c) 在包容长方体中, 从而有.

$$\text{Min}X \leq a \leq \text{Max}X, \text{Min}Y \leq b \leq \text{Max}Y, \text{Min}Z \leq c \leq \text{Max}Z.$$

证毕

求点列 $\{P_i\}$ 包容球半径的函数可定义为:

$$r = r(a, b, c)$$

$$= \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (\sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2}).$$

根据定理, a, b, c 的定义域是 $\text{Min}X \leq a \leq \text{Max}X, \text{Min}Y \leq b \leq \text{Max}Y, \text{Min}Z \leq c \leq \text{Max}Z$.

因此, 求点列 $\{P_i\}$ 最小包容球的半径, 就是求当 a, b, c 为何值时, 函数 $r(a, b, c)$ 取最小值. 然而, 用一般求极值的方法很难求出函数 $r(a, b, c)$ 的极值. 下面用遗传算法来求函数 $r(a, b, c)$ 的近似最小值.

3 求最小包容球的遗传算法

遗传算法 (Genetic Algorithm, 缩写为 GA) 是一类模拟生物进化的智能优化算法, 由于其思想简单、易于实现以及表现出来的健壮性赢得了许多应用领域, 如函数优化就是遗传算法的经典应用领域.

遗传算法的基本步骤: 确定编码方案、确定适应函数、确定选择策略、控制参数的选取、遗传算子的设计、算法终止准则的确定等.

3.1 个体编码

个体编码是一个三元数 $o = (a, b, c)$, 其中基因 a, b, c 是包容球的球心坐标, 根据上段 a, b, c 的范围为: $\text{Min}X \leq a \leq \text{Max}X, \text{Min}Y \leq b \leq \text{Max}Y, \text{Min}Z \leq c \leq \text{Max}Z$.

3.2 初始化种群

随机产生 Pop-Size 个个体 (Pop-Size 是种群的规模):

$$o_i = (a_i, b_i, c_i) \quad i = 1, 2, \dots, \text{Pop-Size}$$

这里, $a_i = \text{Min}X + (\text{Max}X - \text{Min}X) * \text{Rand}_{i1}, b_i = \text{Min}Y + (\text{Max}Y - \text{Min}Y) * \text{Rand}_{i2}, c_i = \text{Min}Z + (\text{Max}Z - \text{Min}Z) * \text{Rand}_{i3}$, 其中 $\text{Rand}_{i1}, \text{Rand}_{i2}$ 和 Rand_{i3} 是区间 $[0, 1]$ 上的随机数.

3.3 遗传操作

(1) 计算个体的适应值

对于个体 $o_i = (a_i, b_i, c_i)$, 计算相应包容圆的半径 $r = r(a_i, b_i, c_i)$.

定义适应度函数为: $f = f(o_i) = 1/r(a_i, b_i, c_i)$,

适应值越大表示个体越优,即点列 $\{P_i\}$ 的包容球半径越小.

(2) 选择操作

计算个体的生存概率 $p_i=f(o_i)/\sum_{j=1}^{PopSize} f(o_j)$,按轮盘赌的选择方式选择适应值大的个体.

(3) 交叉操作

以交叉概率 p_c 选择两个个体进行交叉运算,这里采取线性组合交叉.如个体 $o_i=(a_i,b_i,c_i)$ 和 $o_j=(a_j,b_j,c_j)$ 交叉生成两个新个体为:

$$o'_i=to_i+(1-t)o_j=(ta_i+(1-t)a_j,tb_i+(1-t)b_j,tc_i+(1-t)c_j)$$
$$o'_j=(1-t)o_i+to_j=((1-t)a_i+ta_i,(1-t)b_i+tb_j,(1-t)c_i+tc_j)$$

其中,线性组合系数 $t(0<t<1)$ 是一个给定的常数.

(4) 变异操作

以变异概率 p_m 选择个体,再以 $1/3$ 的概率选取

个体中的某个基因位进行变异操作,即用区间 $[MinX,MaxX]$ 或 $[MinY,MaxY]$ 或 $[MinZ,MaxZ]$ 上的随机数取代之.这样能保持个体的多样性,不致于陷入局部收敛.如对于个体 $o_i=(a_i,b_i,c_i)$ 选取第一个基因作变异操作得到一个新个体: $o_i=(a_i,b_i,c_i)=(MinX+(MaxX-MinX)Rand,b_i,c_i)$, $Rand$ 是区间 $[0,1]$ 上的随机数.

在每代的遗传操作中,将上代中最优个体保留下来,加快了收敛速度.

4 实例测试

例 在球面 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=10^2$ 上取一点列, $\{P_i\}=\{(x_i,y_i,z_i)\}, i=1,2,\dots,12$, 其坐标如表 1 所示,由于计算误差,各点到球心的距离 r 见表 1. 求点列 $\{P_i\}$ 的最小包容球.

表 1 点列的坐标

x	7.41	5.75	-3.63	0.25	6.66	4.46	-7.51	-5.87	3.87	-4.45	5.86	5.01
y	8.94	6.05	9.72	9.27	-5.51	-7.14	-0.49	4.83	5.31	2.24	7.45	11.22
z	6.75	-6.34	-0.95	8.64	6.68	-1.22	0.17	7.48	11.25	9.63	-5.44	4.43
r	9.9997	10.0010	9.9999	10.0002	10.0009	9.9979	9.9994	9.9988	10.0007	9.9938	9.9977	9.9986

用上述的遗传算法进行求解,取种群规模 $PopSize=100$,变异概率 $Pm=0.15$,交叉概率 $Pc=0.45$,线性组合的系数 $t=0.4$,遗传操作最大代数 $MaxGen=500$.共进行了 5 次测试,每次取得最优解时代数、球心坐标、最小包容球的半径及程序的运行时间见表 2.

表 2 程序的执行结果

序号代数	球心	最小半径运行时间
1 287	(1.992926,1.996656,2.002188)	10.00686 <2 秒
2 303	(2.003870,1.991987,1.992194)	10.01194 <2 秒
3 197	(2.008699,2.000546,1.986816)	10.01273 <2 秒
4 289	(2.011623,2.009779,2.006182)	10.01408 <2 秒
5 256	(2.000711,1.995960,2.000018)	10.00341 <2 秒

上述结果表明,用遗传算法求点列 $\{P_i\}$ 最小包容球有效.

参考文献:

[1]王洪发,周铭.用遗传算法求多面体的最小包容长方体[J].计算机工程与应用,2003,(25):100-101.
[2]周明,孙树栋.遗传算法原理及应用[M].北京:国防工业出版社,1999.
[3][日]玄光男,程润伟著,汪定伟,等译.遗传算法与工程设计[M].北京:科学出版社,2000.

Finding Minimum Contain Sphere of Space Finite Points
with Genetic Algorithm

WANG Hong-fa

(Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College, Hangzhou 310018, China)

Abstract: A mathematical model to find contain sphere of space finite points was built, the problem was discussed that minimum contain sphere was transformed to function optimization and meanwhile an optimized solution was found with genetic algorithm.

Key words: space finite points; minimum contain sphere; genetic algorithm