第 24 卷第 2 期
2007 年 4 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.24 No.2
Apr.,2007

文章编号:1005-0523-(2007)02-0158-03

开放式基金的破产概率

张会勇,李鹏飞

(中南大学 数学科学与计算技术学院,湖南 长沙 410075)

摘要:用风险理论的方法定量的讨论了开放式投资基金的破产概率,在一些假设条件下用鞅方法得到了破产概率的上界,讨论了引起基金清算的几个因素之间的关系.

关 键 词:开放式基金;风险模型;破产概率;鞅

中图分类号:O21　　　　**文献标识码**:A

1 建立模型

定义 在给定概率空间,(Ω, F, P),$t\geqslant 0$

$$U(t)=u_1+u_2(1+r_2t)-ur_1t+\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i+u_3(1+\mu_0t+\delta w(t))$$

$$=u_1+u_2+u_3+(u_2r_2+u_3\mu_0-ur_1)t+\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i+u_3\delta w(t)$$

令 $u=u_1+u_2+u_3$ 　$c=(u_2r_2+u_3\mu_0-ur_1)$ 　$S(t)=ct+=\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i+u_3\delta w(t)$

则 $U(t)=u+S(t)$

说明:

(1) 公式中 u 表示基金初始资本,假设可分为三部分 u_1, u_2, u_3,即 $u=u_1+u_2+u_3$.其中 u_1 代表流动资金,主要用于基金份额正常赎回与日常费用;u_2 表示投资于可以带来固定收益的资金,一般投资于金融债券和优先股,或者可以套利保值的金融衍生品;r_1 表示投资于不确定性收益的资金,主要投资于股票或合适的金融衍生品,并假设收益率为一不确定的随机变量,是一带有漂移参数的 *Winner* 过程.r_1 表示基金由于负债形成的损失率.基金的负债主要是由于基金管理人和托管人的工资形成,它根据总资产的大小按照原定的比率按天计算,月末扣除,故可表示为 ur_1t;t 代表时间;$u_2(1+r_2t)$表示投资于固定收益资产的价值(按单利计算),其中 r_2 是利率.另外由于流动资金的利率和其他费用不是主要因素,本文不考虑这些收益或负债.

(2) 为保证基金的安全运行:首先假定 $c=u_2r_2+u_3\mu_0-ur_1>0$,否则 $c<0$,说明基金的管理费和托管费比确定性收益还多,这是对基金份额持有人极不公平的,基金将不能发起.其次,为保证基金资产随着时间增值,必需:

$$E\{S(t)\}=E\{ct+\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i+u_3\delta w(t)\}=(c+\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)t>0$$

否则,基金资产将以概率 1 被清算.

(3) $\{N_1(t)\}$,$\{N_2(t)\}$是分别具有参数 λ_1, λ_2 的泊松过程,$\mu_0t+\delta W(t)$是参数为 μ_0 的漂移 Winner 过程,其中 W(t)为标准 Winner 过程,δ 为系数.

收稿日期:2007-01-05

作者简介:张会勇(1979-),男,河南汝南人,在读研究生.

(4) 假定公式所涉及各过程相互独立．$\{X_i\}$，$\{Y_i\}$是分别具有分布 $F_1(x)$，$F_2(x)$的随机序列；且 $E[X_i]=\mu_1$，$E[Y_i]=\mu_2$．$N_1(t)$，$N_2(t)$分别表示时间段$[0,t]$内申购和赎回次数；X_i，Y_i 分别表示第 i 次的申购额和赎回额．

(5) 破产时刻定义为：

$$T_u=\inf\{t\geqslant 0 \mid u+S(t)\leqslant m\}=\inf\{t\geqslant 0 \mid u-m+S(t)\leqslant 0\}$$

其中 $m<u$，m 为基金存在的最低限额，即基金资产少于 m 将被清算．

相应的依赖时刻 t_0 破产概率 $\Psi(u,t_0)=p_r(T_u\leqslant t_0)$；最终破产概率 $\Psi(u)=p_r(T_u<\infty)$

2　主要结果

引理 1　过程 $S(t)$具有时齐独立增量性，且存在函数 $g(r)$使 $E[\exp(-rS(t))]=\exp\{tg(r)\}$

证明　由于 $\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i$，$\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i$ 为复合泊松过程，$W(t)$为标准 Winner，均具有平稳独立增量性显然，$S(t)$是时齐独立增量过程．

$$\therefore E\{\exp(-rS(t))\}=\exp\{t[\lambda_1(M_x(-r)-1+\lambda_2(M_r(r)-1+\frac{(u_3\delta)^2}{2}r^2-cr]\}=\exp\{tg(r)\}$$

其中 $g(r)=\lambda_1(M_x(-r)-1)+\lambda_2(M_Y(r)-1)+\frac{r^2}{2}(\delta u_3)^2-rc$

M_X，M_Y 分别为分布函数 $F(x)_1$，$F_2(x)$的矩母函数．

引理 2　$\{M_t, F_t, t\geqslant 0\}$是一个鞅，其中 $M_t=\frac{\exp(-r(u+s(t)))}{\exp\{tg(r)\}}$．

证明　易证 M_t 关于 F_t 可测且 $E|M_t|<+\infty$，又对任意的 $0<v<t$

$$E[M_t/F_v]=E\left[\frac{\exp(-r(u+s(t)))}{\exp(tg(r))}/F_v\right]=M_vE\left[\frac{\exp(-rS(t-v))}{\exp\{g(r)(t-v)\}}/F_v\right]=M_v \text{ 成立}$$

定理 1　固定时刻 t_0，则依赖时间 t_0 的破产概率满足：$\Psi(u,t_0\leqslant e^{-r(u-m)}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}e^{tg(r)}$　(1)

最终破产概率满足：$\Psi(u)\leqslant e^{-r(u-m)}\sup\limits_{0\leqslant t}e^{tg(r)}$　(2)

证明　T_u 为破产时刻，显然 $T_u\wedge t_0$ 是$\{F_t, t\geqslant 0\}$有界停时，根据有界停时定理得

$$\exp(-r(u-m))=E[M_0]=E[M_{T_U\wedge t_0}]$$

$$=E[M_{T_U\wedge t_0}\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}+E[M_{T_U\wedge t_0}\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u>t_0\}$$

$$\therefore \Psi(u,t_0)=P\{T_u\leqslant t_0\}\leqslant\frac{e^{-r(u-m)}}{E[M_{T_U}\mid T_u\leqslant t_0]}\leqslant\frac{e^{-r(u-m)}}{E[e^{T_Ug(r)}\mid T_u\leqslant t_0]}\leqslant e^{-r(u-m)}\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}e^{tg(r)}$$

在(1)式中令 $t_0\to\infty$，即得最终破产概率：$\Psi(u)\leqslant e^{-r(u-m)}\sup\limits_{0\leqslant t}e^{tg(r)}$

定理 2　开放式基金的最终破产概率满足：$\Psi(u)\leqslant e^{-R(u-m)}$

证明　设 $R=\sup\{r\mid g(r)\leqslant 0\}$易证 R 为方程 $g(r)=0$ 的唯一正解

又由定理 1 知 $\Psi(u)\leqslant e^{-r(u-m)}\sup\limits_{0\leqslant t}e^{tg(r)}=e^{-R(u-m)}$

系 1　当 $F(x)_1=F_2(x)=F(x)$为指数分布函数，且 $\mu_1=\mu_2=\mu$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 时，

最终破产概率满足：$\Psi(u)\exp(-(u-m)\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+\frac{4\lambda}{(\delta u_3)^2}})$

证明　不妨假定 $c=0$，(此时基金资产的固定收益全部用来支付管理人和托管人的费用，这是最有可能发生破产的情况)，解方程 $g(r)=0$ 得：$r=0$ 或 $r=\pm\frac{1}{\mu\delta u_3}\sqrt{(\delta u_3)^2+4\lambda\mu^2}$

$$\therefore R<\frac{1}{\mu\delta u_3}\sqrt{(\delta u_3)^2+4\lambda\mu^2}$$

说明：实际上知道具体的分布 $F_1(x)$，$F_2(x)$可以计算出具体的 R，这里为了简单仅给出特殊情况下的一个估计上界．λ 越大这个上界的值越小，它说明了在不考虑其他因素的情况下，基金份额的申购和赎回密度如果相同，即单位时间内到达的申购和赎回的平均数量如果相同，那么其流动性大小不会给基金的安全性

造成负面影响；u 越大其上界也越小，即清算的可能性越小，这与实际情况是一致的．以上两方面都说明基金的规模越大，其安全性越好(既使流动性很大)，这说明集合理财不但具有专家理财优势，而且更安全．另外，μ 如果变大其安全性就会很差，说明平均赎回或申购的份额如果很大，其安全性较差，说明数量多而份额小散户资金更有利于基金的安全运营．

定理 3　令 $t_0=y(u-m)$则依赖时间 t_0 的破产概率 $\Psi(u,t_0)$满足：

$$\Psi(u,t_0) \square \begin{cases} \dfrac{C_Y}{\sqrt{u-m}}e^{-R_y(u-m)} \text{当 } y<y_0 \\ \dfrac{C}{2}e^{-R(u-m)} \text{当 } y=y_0 \quad u\to\infty \\ Ce^{-R(u-m)} \text{当} >y_0 \end{cases}$$

证明　由上面(1)式

$$\Psi(u,t_0)\leqslant e^{-r(u-m)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} e^{tg(r)}=e^{-r(u-m)}\max(1,e^{tog(r)} \quad \text{代换} \quad t_0=y(u-m)$$

则 $\Psi(u,y(u-m))\leqslant\max(e^{-r(u-m)},e^{-(u-m)(r-yg(r))})=e^{-(u-m)\min(r,r-yg(r))}$

令 $R_y=\sup\limits_{r\geqslant 0}\min(r,r-yg(r))=\sup\limits_{r\geqslant R}(r,r-yg(r))$

即 $\Psi(u,y(u-m))\leqslant e^{-R_y(u-m)}$

设 $f(r)=r-yg(r)$　$y_0=\dfrac{1}{g'(R)}$，再参考文献 1，2 可得结论成立．

其中 $C_y=-\dfrac{r_y-\tilde{r}_y}{r_y\tilde{r}_y\sqrt{2\pi y g''(r_y)}}$ $u\to\infty$，r_y 是方程$f'(r)=0$ 的解；

$\tilde{r}_y$ 是方程$f(r)-r=R_y-r_y$ 的非负解；$C=\lim\limits_{u\to 0}e^{R(u-m)}\Psi(u)$．

系 1　当$\dfrac{t-(u-m)y_0}{\sqrt{(u-m)v_0}}$有界，$u,t\to\infty$时，$\Psi(u,t_0)\sim N(\dfrac{t-(u-m)y_0}{\sqrt{(u-m)v_0}}Ce^{-R(u-m)}$

证明　参考文献[1]pp．137，文献[2]．这里 $v_0=\dfrac{g''(R)}{(g'(R))^3}$，$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

参考文献：

[1]Grandell．J．，Aspects of Risk Theory [M]．New york：spring－verlag，1993．

[2]Arfwedson G．Research in collective risk theory [M]．AktuarTidskr：skand．1955．

[3]Asmussen．S．，Ruin probabilities [M]．W Singapore：World Scientific，2000．

[4]马红军．开放式基金会计运行研究[M]．成都：西南财经大学出版社，2003．

[5][荷]R．卡尔斯，等著，唐启鹤，等译．现代精算风险理论[M]．北京：科学出版社，2005．

[6]李晋枝，乔克林．随机利率因素的破产模型[J]．云南大学学报(自然科学版)，2003，25(1)：9－12．

[7]Gramer H．Collective risk theory [M]．AktuarTidsr；Stockholm．1955．

Ruin Probability of Open－end Fund

ZHANG Hui-yong　LI Peng-fei

(School of Mathematical Sciences and Computing Technology，Central South University，Changsha 410075，China)

Abstract：In this paper，we discussed the ruin probability of open－end fund by risk model．Under some conditions，we derived the super bound of the ruin probability by martingale method．Furthermore，the relationship between the ruin probability and the initial risk capital is discussed．

Key words：open－end fund；risk model；ruin probability；martingale