文章编号:1005－0523(2007)04－0155－03

模糊理想与富足半群

李春华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:利用Fountain在文[1]中定义的半群 S 上的Green＊－关系 L^*,R^* 及Lawson在文[3]中关于富足半群上的自然偏序理论研究了富足半群上的模糊理想,得到了富足半群上模糊理想的一些性质.在此基础上,给出了富足半群的局部富足子半群的另类刻画.最后进一步给出了局部超富足半群的刻画.

关　键　词:模糊集;富足半群;自然偏序;模糊理想

中图分类号:O152.7　　　　**文献标识码**:A

1　预备知识

本文出现的记号和术语,若未加说明,均参见文献[1－3,5－7].

Fountain在文[1]中定义了半群 S 上的等价关系 L^*,S 的元素 a,b 符合关系 L^* 当且仅当($\forall$ x,y$\in S^1$)($ax=ay\Leftrightarrow bx=by$).对偶地定义 R^*.而 H^* 是 S 的 $L^*\cap R^*$.

引理 1.1[2]　令 S 为半群,a,b,$e=e^2\in S$,则以下各款等价:

(1) aL^*e(aR^*e);

(2) $a=ae$($a=ea$)且 $\forall$ x,y$\in S^1$,$ax=ay\Rightarrow ex=ey$($xa=ya\Rightarrow xe=ye$).

众所周知,L^* 为 S 上的右同余,R^* 为 S 上的左同余,一般地,$L\subseteq L^*$ 且 $R\subseteq R^*$.但当 a,b 为正则元时,aL^*b(aR^*b)当且仅当 aLb(aRb).为方便记,用 L_a^* 表示含 a 的 L^* 一类,用 R_a^* 表示含 a 的 R^* 一类.$E(T)$ 表示 T 中的幂等元集.记 a^+ 为 $E(R_a^*)$ 中元,a^* 为 $E(L_a^*)$ 中元,a^0 为 $E(H_a^*)$ 中元.

半群 S 称为左富足的,如果它的所有 R^*－类都含幂等元.对偶地可定义右富足半群.半群 S 称为富足的,如果它既是左富足的又是右富足的.富足半群 S 称为超富足的,如果它的所有的 H^* 一类都含幂等元.半群 S 称为局部 P 半群,如果对任意 $e\in E(S)$,eSe 具有性质 P 的半群.显然,富足半群为局部富足半群且对富足半群 S 中任意元素 a,恒有 $a=a^+a=aa^*$.

Lawson在文[3]中把正则半群中的自然偏序推广到了富足半群,证明了富足半群 S 上如下定义的关系"$\leqslant$"是偏序:$a\leqslant b\Leftrightarrow\exists$ e,f$\in E(S)$,$a=eb=bf$.自然偏序是半群理论中的一个重要概念,国内外许多学者对它进行了卓有成效的研究([3,4,8]).

引理 1.2[3]　令 S 为富足半群,x,a,$b\in S$,则 $L_{xa}^*\leqslant L_a^*$,$R_{ax}^*\leqslant R_a^*$.

半群 S 的子集 A 称为 S 的序理想,如果 $x\leqslant a$($\forall$ a$\in A$,$x\in S$)$\Rightarrow x\in A$.

设 X 是一个非空集合,称映射 f: $X\to[0,1]$为 X 的一个模糊子集.对任意 x$\in X$,称 $f(x)$为 x 对 f 的隶属度.半群 S 的模糊子集 f 称为 S 的模糊子半群,如果 $\forall$ a,b$\in S$,$f(ab)\geqslant f(a)\wedge f(b)$;$f$ 称为 S 的模糊左理想(模糊右理想),如果 $\forall$ a,b$\in S$,$f(ab)\geqslant f(b)$,($f(ab)\geqslant f(a)$);f 称为 S 的模糊理想,如果 f 既是 S 的模糊左

收稿日期:2006－12－16

基金项目:华东交通大学科研基金资助项目.

作者简介:李春华(1973－),男,江西宜丰人,华东交通大学讲师,硕士,主要从事半群代数理论的研究.

理想又是 S 的模糊右理想.

引理 1.3[6]　令 S 为半群, $a,b\in S$, f 为 S 的模糊右理想,则以下各款等价:

(1) $R_a\leqslant R_b(aRb)$;(2) $f(a)\geqslant f(b)(f(a)=f(b))$.

2　主要结果

命题 2.1　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想,则 $\forall$ a, b $\in S$,

$aR^*b\Rightarrow f(a^+)=f(b^+)$.

证明　令 $a,b\in S$, aR^*b,由引理 1.1, $a^+=b^+a^+$, $b^+a^+b^+$. 又 f 为 S 的模糊右理想,故 $f(a^+)=f(b^+a^+)\geqslant f(b^+)=f(a^+b^+)\geqslant f(a^+)$.

定理 2.2　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则

$aR^*b\Leftrightarrow f(a)=f(b)(\forall$ a, b $\in S)$.

证明　令 $a,b\in S$, aR^*b,则由命题 2.1, $f(a^+)=f(b^+)$. 又 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,故 $f(a)=f(a^+)=f(b^+)=f(b)$. 反之,令 $a,b\in S$,且满足 $f(a)=f(b)$. 因 f 为 S 的模糊右理想,故由引理 1.3, aRb. 而 $R\subseteq R^*$. 故 aR^*b.

基于以上事实,下列结论是显然的确.

推论 2.3　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则 f 在 S 的 R^* 一类上是一常值函数.

证明　可由定理 2.2 直接推得.

推论 2.4　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则以下各款成立:

(1) $f(a)=f(b)\Rightarrow f(ca)=f(cb)(\forall$ a, b, c $\in S)$;

(2) $f(ab)=f(ab^+)$, $f(a^+b)=f(a^+b^+)(\forall$ a, b $\in S)$;

(3) 若 S 为超富足半群,则 $f(a)=f(a^2)(\forall$ a $\in S)$.

证明　(1)令 $a,b\in S$, $f(a)=f(b)$,则由定理 2.2, aR^*b. 又 R^* 为 S 上的左同余. 故 $\forall$ c $\in S$, caR^*cb. 于是由定理 2.2, $f(ca)=f(cb)$. (2)令 $b\in S$,则 bR^*b^+. 又 R^* 为 S 上的左同余. 故 $\forall$ a $\in S$, abR^*ab^+. 于是由定理 2.2, $f(ab)=f(ab^+)$,类似地, $f(a^+b)=f(a^+b^+)$. (3)令 S 为超富足半群,则 $\forall$ a $\in S$,有 $a^0\in E(H_a^*)$. 于是, aR^*a^0. 又 R^* 为 S 上的左同余. 故 $a^2R^*aa^0=a$. 因此由定理 2.2, $f(a)=f(a^2)$.

定理 2.5　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊子集且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则 f 为 S 的模糊右理想当且仅当 $\forall$ x, y $\in S$, $R_x^*\leqslant R_y^*\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$.

证明　先证必要性. 令 $x,y\in S$ 且满足 $R_x^*\leqslant R_y^*$,则 $R_{x^+}^*\leqslant R_{y^+}^*$. 又 x^+, y^+ 均为正则元,故有 $R_{x^+}\leqslant R_{y^+}$. 于是存在 $m\in S$,使得 $x^+=y^+m$. 又 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$ 且 f 为 S 的模糊右理想,故 $f(x)=f(x^+)=f(y^+m)\geqslant f(y^+)=f(y)$.

下证充分性. 令 $x,y\in S$,则由引理 1.2, $R_{xy}^*\leqslant R_x^*$. 故由题设知 $f(xy)\geqslant f(x)$. 因此 f 为 S 的模糊右理想. 至此完成定理证明.

定理 2.6　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则

$f(a)\geqslant f(b)\Leftrightarrow R_a^*\leqslant R_b^*(\forall$ a, b $\in S)$.

证明　先证必要性. 令 $a,b\in S$ 且满足 $f(a)\geqslant f(b)$,则 $f(a^+)\geqslant f(b^+)$. 于是,由引理 1.3, $R_{a^+}\leqslant R_{b^+}$. 又 a^+, b^+ 均为正则元. 故 $R_{a^+}^*\leqslant R_{b^+}^*$. 即 $R_a^*\leqslant R_b^*$. 充分性可由定理 2.5 直接推得.

定理 2.7　令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊子集. 按如下定义 S 的子集: $[\mathrm{a}]=\{x\mid f(x)\geqslant f(a)(x,a\in S)\}$,则以下各款成立:

(1) 若 f 为 S 的模糊右(左)理想,则[a]为 S 的右(左)理想;

(2) 若 f 为 S 的模糊右(左)理想,则[a]为 S 的序理想;

(3) 若 f 为 S 的模糊右理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则[a]为 S 的左富足子半群且满足 $[\mathrm{a}]=[\mathrm{a}^+]$;

(4) 若 f 为 S 的模糊左理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^*)$,则[a]为 S 的右富足子半群且满足 $[\mathrm{a}]=[\mathrm{a}^*]$;

(5) 若 f 为 S 的模糊理想且 $\forall$ x $\in S$, $f(x)=f(x^+)=f(x^*)$,则[e]($\forall$ e $\in E(S)$)为 S 的局部富足子半

群．反之，S 的每个局部富足子半群可这样构作；

(6) 若 f 为 S 的模糊理想且 $\forall x\in S, f(x)=f(x^{+})=f(x^{*})$，则[a]为 S 的局部富足子半群．

证明　(1) 令 f 为 S 的模糊右理想，$x\in[a]$，$y\in S$，则 $f(xy)\geqslant f(x)\geqslant f(a)$．即 $xy\in[a]$．因此[a]为 S 的右理想．对偶地，若 f 为 S 的模糊左理想，则[a]为 S 的左理想．

(2) 令 f 为 S 的模糊右理想，$x\in[a]$，$y\in S$ 且 $y\leqslant x$，则 $\exists e\in E(S)$，使得 $y=xe$．于是 $f(y)=f(xe)\geqslant f(x)\geqslant f(a)$．即 $y\in[a]$．因此[a]为 S 的序理想．对偶地，若 f 为 S 的模糊左理想，则[a]为 S 的序理想．

(3) 令 $x, y\in[a]$，则 $f(x)\geqslant f(a)$，$f(y)\geqslant f(a)$．又 f 为 S 的模糊右理想，故 $f(xy)\geqslant f(x)\geqslant f(a)$．即 $xy\in[a]$．因此[a]为 S 的子半群．下证[a]的每个 R^{*} 类均含幂等元．事实上，因 S 为富足半群，故 $\forall x\in[a]$，有 $xR^{*}(S)x^{+}\in E(S)$．又由题设知 $f(x)=f(x^{+})$．于是 $f(x^{+})=f(x)\geqslant f(a)$．即 $x^{+}\in[a]$．因此，$xR^{*}([a])x^{+}\in E([a])$．即 $[a]=[a^{+}]$．

(4) 可由(3)对偶地证得．

(5) 令 $e\in E(S)$，则由(3)，(4)知，[e]为 S 的富足子半群．下证 $[e]=eSe$．事实上，$\forall x\in[e]$，有 $f(x)\geqslant f(e)$．于是，由定理 2.6 及其对偶结论，可得 $R_x^{*}\leqslant R_e^{*}$，$L_x^{*}\leqslant L_e^{*}$．即 $R_{x^{+}}^{*}\leqslant R_e^{*}$，$L_{x^{*}}^{*}\leqslant L_e^{*}$．又 x^{+}, x^{*}, e 均为正则元，故 $R_{x^{+}}\leqslant R_e$，$L_{x^{*}}\leqslant L_e$．于是，$\exists m, n\in S$，使得 $x^{+}=em$，$x^{*}=ne$．进而，$x=x^{+}xx^{*}=(em)x(ne)=e(mxn)e\in eSe$．即 $[e]\subseteq eSe$．反之，$\forall x\in eSe$，$\exists y\in S$，使得 $x=eye$．又 f 为 S 的模糊理想，故 $f(x)=f(eye)\geqslant f(ey)\geqslant f(e)$．即 $x\in[a]$．反包含成立．即 $[e]=eSe$．因此，[e]为 S 的局部富足子半群．反之，由上述证明过程可知，S 的每个局部富足子半群可这样构作．

(6) 由(3)，(4)知，$[a]=[a^{+}]=[a^{*}]$．又由(5)知，$[a^{+}]$，$[a^{*}]$均为 S 的局部富足子半群．因此，[a]为 S 的局部富足子半群．至此完成定理证明．

推论 2.8　令 S 为超富足半群，f 为 S 的模糊理想，且 $\forall x\in S, f(x)=f(x^{0})$，则 $[a]=\{x \mid f(x)\geqslant f(a)\ (x, a\in S)\}$ 为 S 的局部超富足子半群．反之，S 的每个局部超富足子半群可这样构作．

证明　可由定理 2.7 推得．

参考文献：

[1] Fountain J B. Abundant semigroups[J]. Proc. London Math. Soc. 1982,(44):103－129.

[2] El－Qalliali A and Fountain J B. Idempotent－connected abundant semigroups[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1981,(91):79－90.

[3] Lawson M V. The natural partial order on an abundant semigroup[J]. Proceedings of the Edinburg. Math. Soc. 1987,(30):169－186.

[4] Guo X J, Luo Y F. The Natural Partial Orders on Abundant Semigroups[J]. Advances in Mathematics, 2005(3):297－308.

[5] Petrich M. Completely regular semigroups[M]. New York: Jhon Wiley&Sons Inc, 1999.

[6] John N. Mordeson, Davender S. Malik and Nobuaki Kuroki, Fuzzy semigroups[M]. Springer－verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.

[7] Xie X Y. Fuzzy ideal extensions in semigroups[J]. Kyungpook Math. J., 2002,(42):39－49.

[8] 李春华，黄华伟，等．富足半群上的自然偏序[J]．江西师范大学学报(自然科学版)，2004,28(1):24－26.

Fuzzy Ideals and Abundant Semigroups

LI Chun-hua

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, first, we study fuzzy ideals on abundant semigroups by using Green $*$－relations L^{*}, R^{*} on semigroups defined by Fountain in [1] and the natural partial order theory on abundant semigroups introduced by Lawson in [3], and give some properties of fuzzy ideals on such semigroups. On this base, we give another structure of locally abundant subsemigroups to an abundant semigroup. Furthermore, we give a structure of locally superabundants.

Key words: fuzzy set; abundant semigroup; natural partial order; fuzzy ideal