文章编号:1005-0523(2007)04-0131-02

Euler 函数的推广

周尚超

(华东交通大学 江西 南昌 330013)

摘要:Euler 函数 $\psi(m)$是不大于 m 且与 m 互素的正整数 x 的个数,令 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 n 维正整数向量.$x_i<=m$,定义 $\psi(m, X)$是 $\gcd(m, x_1, x_2, \cdots x_n)$为 1 的向量的个数.本文给出 $\psi(m, X)$的计算公式(定理 2),且 $\psi(m)$为此公式的特例.

关 键 词:Euler 函数;最大公因数;积性函数

中图分类号:O156.1 **文献标识码**:A

Euler 函数 $\psi(m)$是不大于 m 且与 m 互素的正整数 x 的个数.令 $\gcd(a, b)$表示 2 个正整数 a, b 的最大公因数,则 $\psi(m)$是 $\gcd(m, x)=1$ 的正整数 x 的个数.如果 $m=p$ 是素数,则 $\psi(m)=p-1$.若 $m=p^t$,与 m 不互素的只有 p 的倍数 $p, 2p, \cdots, p^{t-1}p$,这共有 p^{t-1}个,其余 p^t-p^{t-1}个都与 p^t 互素.即

$$\psi(p^t)=p^t-p^{t-1}=p^t(1-1/p)$$

命题 1 设 $\gcd(a, b)=1$,则

$$\psi(ab)=\psi(a)\ \psi(b)$$

由命题 1,知 Euler 函数是积性函数.Euler 函数的计算公式如下.

定理 1 令 $m=p_1^{t1} p_2^{t2}\cdots p_k^{tk}$, $p_i(i=1,2,\cdots,k)$是素数,则

$$\psi(m)=m(1-1/p_1)(1-1/p_2)\cdots(1-1/p_k)$$

或
$$\psi(m)=p_1^{t1-1} p_2^{t2-1}\cdots p_k^{t_1, t_2, \cdots t_k}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$$

或
$$\psi(m)=(p_1^{t1}-p_1^{t1-1})(p_2^{t2}-p_2^{t2-1})\cdots(p_k^{tk}-p_k^{tk-1})$$

令 $X=(x_1, x_2, \cdots x_n)$是 n 维正整数向量,$x_i\leqslant m$,$\psi(m, X)$是 $\gcd(m, x_1, x_2, \cdots x_n)=1$ 的向量 $X(x_i<=m)$的个数.当 $n=1$ 时,$\psi(m, X)$就是 Euler 函数.

定理 2 令 $m=p_1{}^{t1} p_2{}^{t2}\cdots p_k{}^{tk}$, $p_i(i=1,2,\cdots,k)$是素数,$P_i=p_i^n$, $i=1,\cdots,k$

则
$$\psi(m, X)=m^n(1-1/P_1)(1-1/P_2)\cdots(1-1/P_k)$$

证明 $x_i\leqslant m$, $i=1,2,\cdots n$;因此所有向量 X 共有 m^n 个,即$|X|=m^n$,令 A_j 是 $\gcd(m, x_1, x_2, \cdots x_n\equiv 0 \pmod{p_j})$的元素 X 的个数,则 $\gcd(m, x_1, x_2, \cdots x_n)\neq 1$ 的元素的集合是 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$,因此

$$\psi(m, X)=|X|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|$$

如果 x_i 都是 p_j 的倍数,则 $\gcd(m, x)$是 p_j 的倍数,在 $1,\cdots,m$ 中有 m/p_j 个数是 p_j 的倍数.因此$|A_j|=(m/p_j)^n$.如果 $x_i(i=1,\cdots,k)$都是 p_j, p_s 的倍数,则 $\gcd(m, X)$是 p_jp_s 的倍数,因此$|A_j\cap A_s|=(m/p_j/p_s)n$,依此类推.根据

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=$$

收稿日期:2007-06-20

基金项目:江西省自然科学基金项目(511016);国家自然科学基金项目(10661007)

作者简介:周尚超(1948-),男,云南蒙自人,教授.

$$\begin{aligned}
&\sum|A_j| \quad (1\leqslant j\leqslant k)\\
&-\sum|A_jA_s| \quad (1\leqslant j<s\leqslant k)\\
&+\sum|A_jA_sA_t| \quad (1\leqslant j<s<t\leqslant k)\\
&\cdots\\
&+(-1)^{k+1}|A_1A_2\cdots A_k|\\
&=\sum(m/p_j)^n \quad (1\leqslant j\leqslant k)\\
&-\sum(m/p_j/p_s)^n \quad (1\leqslant j<s\leqslant k)\\
&+\sum(m/p_j/p_s/p_t)^n \quad (1\leqslant j<s<t\leqslant k)\\
&\cdots\\
&+(-1)^{k+1}(m/p_1/p_2/\cdots/p_k)^n
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
\psi(m,X)&=|X|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|\\
&=m^n(1-1/P_1)(1-1/P_2)\cdots(1-1/P_k)
\end{aligned}$$

系 1 令 $m=p_1^{t1}\,p_2^{t2}\cdots p_k^{t_1,t_2,\cdots t_k}$，$p_i(i=1,2,\cdots,k)$是素数，$P_i=p_i^n$，$i=1,\cdots,k$

则 $\psi(m,X)=(p_1^{t1n}-p_1^{(t1-1)n})(p_1^{t2n}-p_1^{(t2-1)n})\cdots(p_1^{tkn}-p_1^{(tk-1)n})$.

或 $\psi(m,X)=m/(p_1p_2\cdots p_n)(p_1^n-1)(p_2^n-1)\cdots(p_k^n-1)$.

系 2 $\psi(m,X)$是积性函数，即：若 $\gcd(a,b)=1$，则

$$\psi(ab,X)=\psi(a,X)\psi(b,X)$$

设有如下的同余方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1\ (\mathrm{mod}\ m) \tag{1}$$

则方程(1)有解的充要条件是 $\gcd(m,a_1,a_2,\cdots a_n)=1$，因此 $\psi(m,X)$是有解方程(1)的个数.

参考文献：

[1] 华罗庚.数论导引[M].北京：科学出版社，1979.

[2] 熊全淹.初等整数论[M].武汉：湖北人民出版社，1982.

[3] R.K.盖伊.数论中未解决的问题[M].北京：科学出版社，2003.

A Generalization of Euler function

ZHOU Shang-chao

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ be n-dimension integer vector, $1\leqslant x_i\leqslant m$. $\psi(m,X)$ be the vector's number for $\gcd(m,x_1,x_2,\cdots x_n)=1$. then $\psi(m,X)=m^n(1-1/P_1)(1-1/P_2)\cdots(1-1/P_k)$, where $m=p_1^{t1}\,p_2^{t2}\cdots p_k^{tk}$, p_i $(i=1,2,\cdots,k)$ is prime number, $P_i=p_i^n$.

Key words: euler function; greatest common divisor; multiplicative function.