

文章编号:1005-0523(2007)04-0141-03

双负二项风险模型的破产概率

彭 丹¹, 刘东海¹, 刘再明²

(1. 湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湘潭 411201; 2. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 长沙 410075)

摘要:在经典离散风险模型的基础上把复合负二项风险模型推广为双负二项风险模型, 即单位时间内的保费收取次数也为负二项分布, 讨论了此时盈余的性质, 并给出了关于破产概率的一个定理, 得到了破产概率的一个上界.

关键词:风险模型; 破产概率; 盈余; 保费

中图分类号:O211.3

文献标识码:A

1 引言

近年来, 关于离散时间风险模型, 人们讨论最多的是复合二项风险模型^[1], 这类模型中的理赔次数的均值大于方差. 当保单组合的理赔次数的方差大于其均值时, 人们进一步讨论了复合负二项风险模型^[2]. 但在这类复合负二项风险模型中, 保险公司按照单位时间常数速率取得保单(假定每张保单保费相等), 但在实际生活中, 不同单位时间所取得的保单数常常不一样, 是一个随机变量. 根据这一实际情况, 本文将复合负二项风险模型中的保费收取次数过程推广为负二项过程, 并在此基础上讨论了盈余的性质, 给出关于破产概率的一个定理, 得到了破产概率的一个上界.

2 双负二项风险模型

本文考虑的模型如下:

$$X(n) = u + cM(n) - Y(n), \text{ 令 } S(n) = cM(n) - Y(n), Y(n) = \sum_{i=1}^{N(n)} Y_i.$$

设 $u > 0, c > 0$, u 是保险公司的初始资本, c 是保险公司单位时间收取的保费, 以下随机变量都定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 上.

1) 索赔额序列 $\{Y_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ 是取值于 $(0, +\infty)$ 的独立同分布的随机变量序列, 分布函数为 $F(y)$, $\mu = EY$, $\delta^2 = VarY$.

2) $N(n)$ 为时间段 $[0, n]$ 内索赔次数, 服从参数为 $(n, \bar{p})$ 的负二项分布, 即 $P(N(n) = k) = C_{n+k-1}^k p^{n-k} \bar{p}$.

3) $M(n)$ 为时间段 $[0, n]$ 内保单总数, 服从参数为 (n, p) 的负二项分布点, 即 $P(M(n) = k) = C_{n+k-1}^k p^n q^{k-1}$.

4) $M(n), N(n), \{Y_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ 是相互独立的随机序列.

5) $X(n)$ 是保险公司在时刻 n 的盈余资本.

收稿日期: 2006-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371133), 湖南省自然科学基金资助项目(06JJ20019).

作者简介: 彭丹(1979-), 女, 硕士, 研究方向: 随机过程及其应用.

为保证公司稳定经营,假定单位时间内平均保费收入大于平均理赔额,即 $\frac{cq}{p} > \frac{\bar{q}\mu}{p}$, 由此定义安全负荷系数 $\rho = \frac{\overline{cq} - \overline{pq}\mu}{\overline{pq}\mu} > 0$, 定义破产时刻 $T_u = \inf\{n \geq 1: X(n) < 0\}$, 最终破产概率 $\psi(u) = P\{T_n < \infty | X(0) = u\}$. 不失一般性, 假定存在 $r > 0$, 使得 $M_Y(r) = E[e^{rY}] < \infty$, 矩母函数存在区间为 $(-\infty, r)$.

3 主要结论

引理 3.1 盈余过程 $\{S(n), n=1, 2, 3, \dots\}$ 具有下列性质:

(1) $ES(n) = \frac{cnq}{p} - \frac{n\bar{q}\mu}{p}$; (2) $S(n)$ 具有平稳独立增量.

证明 (1) $ES(n) = E(cM(n) - Y(n)) = \frac{cnq}{p} - \frac{n\bar{q}\mu}{p}$

(2) 对 $n_0 < n_1 < \dots < n_l$, 随机变量

$$S(n_i) - S(n_{i-1}) = c(M(n_i) - M(n_{i-1})) - (Y(n_i) - Y(n_{i-1})) \quad (i=1, 2, \dots)$$

而

$$M(n_1) - M(n_0), M(n_2) - M(n_1), \dots, M(n_l) - M(n_{l-1})$$

$$Y(n_1) - Y(n_0), Y(n_2) - Y(n_1), \dots, Y(n_l) - Y(n_{l-1})$$

是相互独立的, 因此盈余序列 $\{S(n), n=1, 2, 3, \dots\}$ 具有独立增量.

又因为 $S(n+k) - S(n) = c(M(n+k) - M(n)) + (Y(n+k) - Y(n))$

且对一切 $n \geq 0$, $M(n+k) - M(n)$, $Y(n+k) - Y(n)$ 具有相同的分布,

所以 $S(n+k) - S(n)$ 也具有相同的分布, $\{S(n), n=1, 2, 3, \dots\}$ 具有平稳增量.

综上所述, $\{S(n), n=1, 2, 3, \dots\}$ 具有平稳独立增量.

引理 3.2 关于未知量 r 的方程 $\frac{p}{1-qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1-qM_r(r)} = 1$ 至少有一正根 R .

定义 $R = \inf\{r | g(r) = 1, r > 0\}$ 为调节系数.

证明 令 $g(r) = \frac{p}{1-qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1-qM_r(r)}$, 显然 $g(0) = 1$, $g'(0) = \frac{\bar{q}\mu}{p} - \frac{cq}{p} < 0$. 可知对充分小的 $\Delta r \in (0, z)$, 有 $g(\Delta r) < 1$. 又当 $r \rightarrow z$ 时, $g(r) \rightarrow \infty$, 故必存在 $r^* \in (0, z)$, 使 $g(r^*) = 1$. 又易知 $\forall \epsilon > 0$, 当 $r \in (r^* - \epsilon, r^*)$ 时, $g(r) < 1$; 当 $r \in (r^*, r^* + \epsilon)$ 时, $g(r) > 1$. 故 $R = \inf\{r | g(r) = 1, r > 0\}$ 是方程 $g(r) = 1$ 的正解.

定理 3.3 在风险过程 $\{X(n), n=1, 2, 3, \dots\}$ 下, 设 R 为调节系数, 则

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RX(T_u)} | T_u < +\infty]}. \text{特别地: } \Psi(u) \leq e^{-Ru}, \forall u \geq 0.$$

证明 对 $n \geq 1$ 和 $r > 0$, 我们考察

$$E[e^{-rX(n)}] = E[e^{-rX(n)} | T_u \leq n] \cdot p(T_u \leq n) + E[e^{-rX(n)} | T_u \geq n] \cdot p(T_u \geq n) \quad (1)$$

因为 $X(n) = u + cM(n) - S(n)$, 故(1)式左端可写为:

$$E[e^{-rX(n)}] = e^{-ru} \cdot E[e^{-rcM(n)}] \cdot E[e^{rS(n)}] = e^{-ru} \cdot \left[\frac{p}{1-qe^{-rc}}\right]^n \cdot \left[\frac{\bar{p}}{1-qM_r(r)}\right]^n$$

而(1)式右端第一项中, $x(n)$ 可写为: $X(n) = X(T_u) + c(M(n) - M(T_u)) - (S(n) - S(T_u))$

对于给定的 T_u : $M(n) - M(T_u)$, $S(n) - S(T_u)$, $X(T_u)$ 是相互独立的. 有

$$\begin{aligned} & E[e^{-rX(n)} | T_u \leq n] \cdot p(T_u \leq n) \\ &= E[e^{-rX(T_u)} | T_u \leq n] E[e^{-rc(M(n) - M(T_u))} | T_u \leq n] E[e^{r(S(n) - S(T_u))} | T_u \leq n] \cdot p(T_u \leq n) \\ &= E[e^{-rX(T_u)} | T_u \leq n] \cdot p(T_u \leq n) \cdot \left[\frac{p}{1-qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1-qM_r(r)}\right]^{(n-T_u)} \end{aligned}$$

选择 $r = R$, 则(1)式变为

$$e^{-Ru} = E[e^{-RX(T_u)} | T_u \leq n] \cdot p(T_u \leq n) + E[e^{-RX(T_u)} | T_u > n] \cdot p(T_u > n) \quad (2)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则上式右端第一项变为 $E[e^{-RX(T_u)} | T_u < \infty] \cdot p(T_u < \infty)$

若能证明当 $n \rightarrow \infty$ 时,右端第二项为零,则定理得证;以下将证明这点:

$$\text{记 } \alpha = \frac{cq}{p} - \frac{\overline{\mu}q}{p} > 0, \beta^2 = \frac{c^2}{2}q + \frac{\overline{q}}{p}\delta^2 + \frac{\overline{q}}{2}\mu^2$$

易知 $\text{Var}(X(n)) = n\beta^2$. 由于 $\alpha > 0$, 考察 $\Delta = u + n\alpha - \beta n^{\frac{2}{3}}$ 只要 n 充分大,它是正的. 利用 $X(n)$ 和 Δ 的大小关系将(2)式右端第二项拆为两项有

$$E[e^{-RX(n)} | T_u > n, 0 \leq X(n) \leq \Delta] \cdot p(T_u > n, 0 \leq X(n) \leq \Delta) + E[e^{-RX(n)} | T_u > n, X(n) > \Delta] \cdot p(T_u > n, X(n) > \Delta) \leq P(0 \leq X(n) \leq \Delta) + e^{-R\Delta} \quad (3)$$

由契比雪夫不等式 $P(0 \leq X(n) \leq \Delta) \leq \frac{\text{Var}(X(n))}{4} = n^{\frac{1}{3}}$,

故当 $n \rightarrow +\infty$ 时, (3)式右端将为零.

故在(2)式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 有 $e^{-Ru} = E[e^{-RX(T_u)} | T_u < \infty] \cdot P(T_u < +\infty)$,

$$\text{即 } \Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RX(T_u)} | T_u < +\infty]},$$

又因 $X(T_u) < 0$, 故 $E[e^{-RX(T_u)} | T_u < \infty] > 1$, 可得: $\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \forall u \geq 0$. 定理得证.

参考文献:

- [1] 龚日朝, 杨向群. 复合二项风险模型下的生存概率[J]. 经济数学, 2001, 18(2): 38~41.
- [2] 高明美, 赵明清. 复合负二项风险模型的破产概率[J]. 山东科技大学学报, 2006, 25(1): 102~104.
- [3] 高明美, 赵明清, 王建新. 双二项风险模型的破产概率[J]. 经济数学, 2004, 21(1): 6~9.
- [4] 刘东海, 刘再明. 双险种二项风险模型的破产概率[J]. 华东交通大学学报 2005, 25(5): 162~164.
- [5] Grandell J. Aspects of Risk Theory [M]. New York: Springer Verlag, 1991.
- [6] 孙立娟, 顾岚. 离散时间保险风险模型的破产问题[J]. 应用概率统计, 2002, 18(3): 293~299.

The Ruin Probability of The Double Negative Binomial Risk Model

PENG Dan¹, LIU Dong-hai¹, LIU Zai-ming²

(1. Department of Mathematics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201;

2. Department of Mathematics, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: In this paper, the authors generalize the ruin probability from the compound negative binomial model to the double binomial model on the foundation of discrete classical risk model, i.e. the premium are random variables. We consider the character of surplus and drive a theorem with ruin probability and obtain a inequality.

Key words: risk model; ruin probability; surplus; premium