文章编号: 1005-0523(2007)04-0152-03

关于正向极限的一些性质

肖贤民, 黄福生, 曾慧平

(江西师范大学 数学与信息科学学院, 南昌 330022)

摘要: 主要证明了在半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 及半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R$ (其中 $\delta_i: \alpha \mapsto \alpha/\xi$) 下正向极限 $\lim R_i$ 的存在性并研究了在某些条件下正向极限 R 与半环族 $R_i (i \in \Omega)$ 之间可保留的性质.

关键词: 正向极限; 正向系; 推出.

中图分类号: O153.3

文献标识码: A

1 引言与准备

本文中的半环均指含 1 的半环, 即 [1] 中的 *semiring*. 半环态射同 [1] 的定义. 如果 R 与 S 是半环, 且 $\gamma: R \rightarrow S$ 为半环态射, 记 $\ker \gamma = \{a \in R \mid \gamma(a) = 0\}$.

定义 1.1 设 Ω 为一个集合, 其元素之间存在一种可传与自反的关系 $\leq$, 即, 若 $a \leq b$, 且 $b \leq c$, 则 $a \leq c$; 而且对 $\forall a \in \Omega$ 恒有 $a \leq a$, 这种集合 Ω 称为拟有序集.

对于 Ω 中任何两个元素 i 与 j , 必有 $k \in \Omega$, 使 $i \leq k$ 与 $j \leq k$. 满足这个条件的拟有序集叫做一个有向拟有序集.

定义 1.2 设 Ω 为一个有向拟有序集, $\{R_i; i \in \Omega\}$ 是一个半环族, 对 Ω 中任意的 $i \leq j$, 若半环态射 $\gamma_{ij}: R_i \rightarrow R_j$ 满足下列条件:

- (1) $\forall i \in \Omega$, γ_{ii} 是单位映射;
- (2) Ω 中 $\forall i \leq j \leq k$, 有 $\gamma_{jk}\gamma_{ij} = \gamma_{ik}$.

则称 $\{R_i; i \in \Omega\}$ 为 Ω 上的一个半环正向系, 记为: $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$.

定义 1.3 若 $\{R_i; i \in \Omega\}$ 为 Ω 上的一个半环正向系, 有半环 R , 对每个 $i \in \Omega$, 有半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R$ 满足:

- (3) 对 Ω 中 $\forall i \leq j$ 有 $\delta_j\gamma_{ij} = \delta_i$;
- (4) 若任意半环 S 和态射集 $\{\eta_i: R_i \rightarrow S (i \in \Omega)\}$ 对于 Ω 中所有 $i \leq j$ 满足: $\eta_j\gamma_{ij} = \eta_i$, 则存在唯一的半环态射 $\eta: R \rightarrow S$ 对所有的 $i \in \Omega$ 有 $\eta\delta_i = \eta_i$.

称满足以上条件的 $(R, \delta_i; \Omega)$ 是半环正向系 $\{R_i; i \in \Omega\}$ 的正向极限, 记为: $\lim R_i$.

2 正向极限存在性

定理 2.1 (存在性定理) 若 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 是一个半环正向系, S 是 R_i 的无交并, 在 S 上定义二元关系 $\xi: a \xi b \Leftrightarrow \Omega$ 中存在 $i, j \leq k$ 使得 $a \in R_i, b \in R_j, \gamma_{ik}(a) = \gamma_{jk}(b)$. 显然对所有的 $n \geq k$ 有 $\gamma_{in}(a) = \gamma_{jn}(b)$.

收稿日期: 2007-03-16

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目 (0611051)

作者简介: 肖贤民 (1981-) 男, 湖北天门人, 理学硕士研究生, 从事半环理论的研究.

令 $R = S/\xi$, 半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$. 则 $R = S/\xi$ 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限.

证明 1. 显然 ξ 是 S 上的等价关系. 记 $R = S/\xi$ 中 $\oplus$ 与 e 的运算如下:

$$\alpha/\xi \oplus b/\xi = (\gamma_{ik}(\alpha) \oplus \gamma_{jk}(b))/\xi \in R;$$

$$\alpha/\xi e b/\xi = (\gamma_{ik}(\alpha) e \gamma_{jk}(b))/\xi \in R.$$

其中 $a \in R_i, b \in R_j; i, j \leq k$. 则这样定义的运算: $\alpha/\xi \oplus b/\xi, \alpha/\xi e b/\xi$ 与其代表元的选取无关, 事实上, 若 $a_1/\xi = a/\xi, b_1/\xi = b/\xi$ 且 $a_1/\xi \oplus b_1/\xi = (\gamma'_{i'k'}(a_1) \oplus \gamma'_{j'k'}(b_1))/\xi$, 其中 $a_1 \in R_{i'}, b_1 \in R_{j'}; i', j' \leq k'$, 则存在 $i, i' \leq k_1, j, j' \leq k_2$ 使得 $\gamma_{ik_1}(a) = \gamma'_{i'k_1}(a_1), \gamma_{jk_2}(b) = \gamma'_{j'k_2}(b_1)$. 当 $k, k' \leq l$ 时, $\gamma_{kl}(\gamma_{ik}(a) + \gamma_{jk}(b)) = \gamma_{il}(a) + \gamma_{jl}(b) = \gamma_{i'l}(a_1) + \gamma_{j'l}(b_1) = \gamma_{k'l}(\gamma_{i'k'}(a_1) + \gamma_{j'k'}(b_1))$. 有 $a_1/\xi \oplus b_1/\xi = (\gamma'_{i'l}(a_1) \oplus \gamma'_{j'l}(b_1))/\xi = (\gamma_{il}(a) \oplus \gamma_{jl}(b))/\xi = \alpha/\xi \oplus b/\xi$. 同样也有 $\alpha/\xi e b/\xi = a_1/\xi e b_1/\xi$. 所以运算 $\oplus$ 与 e 定义确定.

2. 下证 $R = S/\xi$ 是半环. 由上面的定义, 易知:

- (1) $(R, \oplus)$ 是含单位元 $0/\xi$ 的可换么半群;
- (2) (R, e) 是含单位元 $1/\xi$ 的么半群;
- (3) 对所有 $\alpha/\xi \in R$; 有 $(0/\xi)(\alpha/\xi) = 0 = (\alpha/\xi)(0/\xi)$;
- (4) $0/\xi \neq 1/\xi$.

又因为 $(\alpha/\xi) e [(b/\xi) \oplus (c/\xi)] = (\gamma_{ik}(\alpha) \gamma_{jk}(b) + \gamma_{ik}(\alpha) \gamma_{tk}(c))/\xi$ (1)

$[(\alpha/\xi) e (b/\xi)] \oplus [(\alpha/\xi) e (c/\xi)] = (\gamma_{ik}(\alpha) \gamma_{jk}(b) + \gamma_{ik}(\alpha) \gamma_{tk}(c))/\xi$ (2)

其中 $a \in R_i, b \in R_j, c \in R_t$ and $i, j \leq k_1; j, t \leq k_2; i, t \leq k_3; k_1, k_2, k_3 \leq k$. 显然 (1) = (2).

所以有 $(\alpha/\xi) e [(b/\xi) \oplus (c/\xi)] = [(\alpha/\xi) e (b/\xi)] \oplus [(\alpha/\xi) e (c/\xi)]$, 同样有 $[(b/\xi) \oplus (c/\xi)] (\alpha/\xi) = [(b/\xi) e (a/\xi)] \oplus [(b/\xi) e (c/\xi)]$. 这样就证明了是 $R = S/\xi$ 半环.

3. 再证半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$ 满足定义 1.3 中的 (3) 与 (4).

事实上, 对于 Ω 中的所有 $i \leq j \leq k, \delta_i(\alpha) = \alpha/\xi, \gamma_{jk}(\gamma_{ij}(a)) = \gamma_{ik}(\alpha)$, 则 $\gamma_{ij}(\alpha)/\xi = \alpha/\xi$ 所以 $\delta_j(\gamma_{ij}(\alpha)) = \delta_i(\alpha) = \alpha/\xi$, 对所有 $i \leq j$ 满足 $\delta_j \gamma_{ij} = \delta_i$. 故定义 1.3 中 (3) 满足.

若任意一半环 R' , 半环态射 $\eta_i: R_i \rightarrow R' (i \in \Omega)$ 对 Ω 中所有 $i \leq j$ 有 $\eta_j \gamma_{ij} = \eta_i$, 定义 $\eta: R \rightarrow R'; \alpha_i/\xi \eta_k \gamma_{ik}(\alpha_i)$ 其中 $\alpha_i \in R_i, i \leq k$; 则 η 定义良好.

事实上, 若 $\alpha_i/\xi = b_j/\xi$, 则 $\gamma_{ik}(\alpha_i) = \gamma_{jk}(b_j)$, 因此 $\eta(\alpha_i/\xi) = \eta(b_j/\xi)$, 又 $\forall i \in \Omega$ 有 $\eta \delta_i(\alpha_i) = \eta(\alpha_i/\xi) = \eta_k \gamma_{ik}(\alpha_i) = \eta_i(\alpha_i)$. 容易得出 $\eta \delta_i = \eta_i$, 再证 η 的唯一性, 若存在另一个态射 η' 满足条件, 则 $\eta'(\alpha_i/\xi) = \eta' \delta_i(\alpha_i) = \eta_i(\alpha_i) = \eta \delta_i(\alpha_i)$. 因此, $\eta' = \eta$. 故定义 1.3 中 (4) 满足.

所以 $R = S/\xi$ 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限.

定理 2.2 (唯一性定理) 若半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限 $\lim R_i$ 存在, 则必是唯一的.

3 正向极限的一些性质

定义 3.1 半环 S 上的元素 a 称为加法(乘法)幂等的, 如果它满足附加条件 $\forall a \in S, a + a = a (a \cdot a = a)$. 半环 S 称为幂等的, 如果 S 的所有元素是幂等的.

定义 3.2 半环 S 称为单半环, 若 $\forall r \in S, a + 1 = 1$; 半环 S 称为零和自由的, 如果 $\forall r, r' \in S$, 有 $r + r' = 0$, 则 $r + r' = 0$; 半环 S 称为整的, 如果 $\forall r, r' \in S$, 有 $r \cdot r' = 0$, 则 $r = 0$ 或 $r' = 0$.

命题 3.3 若 R 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限, 其半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$, 则 R 是加法(乘法)幂等的当且仅当对 $\forall i \in \Omega, R_i$ 是加法(乘法)幂等的.

命题 3.4 若 R 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限, 其半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$, 则对 Ω 中所有 $i \leq j, \ker \gamma_{ij} = \{0\}$ 当且仅当 $0/\xi = \{0_{R_i} \mid \forall i \in \Omega\}$.

命题 3.5 若 R 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限, 其半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$, 且 Ω 中所有 $i \leq j$, 有 $\ker \gamma_{ij} = \{0\}$, 则:

- (1) $R_i (i \in \Omega)$ 是零和自由的当且仅当 R 是零和自由的;
- (2) $R_i (i \in \Omega)$ 是整的当且仅当 R 是整的.

证明 (1) 若 $R_i (i \in \Omega)$ 是零和自由的, 设 $a \in R_i, b \in R_j; a/\xi, b/\xi \in R$ 满足 $0/\xi = (a/\xi) \oplus (b/\xi) = (\gamma_{ik}(\alpha) \oplus \gamma_{jk}(b))/\xi$

$(a) \oplus \gamma_{jk}(b) / \xi$, 又因为 Ω 中所有 $i \leq j$, $\ker \gamma_{ij} = \{0\}$, 则有 $\gamma_{ik}(a) + \gamma_{jk}(b) = 0_{R_i}$. 又由 $R_i (i \in \Omega)$ 是零和自由的, 这意味着 $\gamma_{ik}(a) = \gamma_{jk}(b) = 0_{R_k}$, 则 $a = b = 0_{R_k}$. 因此 $a/\xi = b/\xi = 0/\xi$, 即得证 R 是零和自由的. 反之, 设 R 是零和自由的, $a, b \in R_i$ 满足 $a + b = 0_{R_i}$. 则 $\delta_i(a + b) = \delta_i(a) \oplus \delta_i(b) = a/\xi \oplus b/\xi = 0/\xi$, 因此 $a/\xi = b/\xi = 0/\xi$. 由 Ω 中所有 $i \leq j$, 有 $\ker \gamma_{ij} = \{0\}$, 有 $a = b = 0_{R_i}$, 即得证 $R_i (i \in \Omega)$ 是零和自由的.

(2) 假设 $R_i (i \in \Omega)$ 是整的, 设 $a \in R_i, b \in R_j; a/\xi, b/\xi \in R$ 满足 $0/\xi = (a/\xi)e(b/\xi) = (\gamma_{ik}(a)\gamma_{jk}(b))/\xi$, 又因为 Ω 中所有 $i \leq j$, 有 $\ker \gamma_{ij} = \{0\}$, 则有 $\gamma_{ik}(a)\gamma_{jk}(b) = 0_{R_k}$. 又由 $R_i (i \in \Omega)$ 是整的, 这意味着 $\gamma_{ik}(a) = 0$ 或 $\gamma_{jk}(b) = 0$, 则 $a = 0_{R_k}$ 或 $b = 0_{R_k}$. 因此 $a/\xi = 0/\xi$ 或 $b/\xi = 0/\xi$, 即得证 R 是整的. 反之, 设 R 是整的, $a, b \in R_i$ 满足 $ab = 0_{R_i}$. 则 $\delta_i(ab) = \delta_i(a)e\delta_i(b) = a/\xi e b/\xi = 0/\xi$. 因此 $a/\xi = 0/\xi$ 或 $b/\xi = 0/\xi$. 由 Ω 中所有 $i \leq j$, 有 $\ker \gamma_{ij} = \{0\}$, 有 $a = 0_{R_i}$ 或 $b = 0_{R_i}$, 即得证 $R_i (i \in \Omega)$ 是整的.

命题 3.6 若 R 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限, 其半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$, 若 $R_i (i \in \Omega)$ 是单的则 R 是单的. 如果 $\gamma_{ij}^{-1}(1_{R_j}) = \{1_{R_i}\}$, 反之也成立.

证明 若 $R_i (i \in \Omega)$ 是单的, 则 $1/\xi \oplus a/\xi = (\gamma_{jk}(1_{R_j}) + \gamma_{ik}(a))/\xi = \gamma_{jk}(1_{R_j})/\xi = 1/\xi$, 其中 $a \in R_i (i \in \Omega)$ 且 $i, j \leq k$. 所以 R 是单的. 若 $\gamma_{ij}^{-1}(1_{R_j}) = \{1_{R_i}\}$, 即 $R_i (i \in \Omega)$ 是单的.

命题 3.7 若 R 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限, 其半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$, 若 $R_i (i \in \Omega)$ 是环则 R 是环.

证明 设 $R_i (i \in \Omega)$ 是环, 若 $a/\xi \in R$, 则存在 R_i 使得 $a \in R_i$. 因此有 $a/\xi \oplus (-a)/\xi = (\gamma_{ii}(a) + \gamma_{ii}(-a))/\xi = 0/\xi$, 所以 $a/\xi \in V(R)^{[1]}$, 即 R 是环.

命题 3.8 若 R 是半环正向系 $\{R_i, \gamma_{ij}; \Omega\}$ 的正向极限, 其半环态射 $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$, 若 $R_i (i \in \Omega)$ 是加法幂等的, $a \in V(R_i)$, 则 $a/\xi = (-a)/\xi$ 当且仅当 $a/\xi = 0/\xi$.

推出的定义见文献[2].

定理 3.9 设 (A, f_1, f_2) 为 $\{\phi_1, \phi_2\}$ 的推出, 则 A 必是半环正向系 $\{A_i, \phi_i; \Gamma\}$ 的正向极限, 其中 $f_0 = f_1 \phi_1$.

证明 首先, $f_1 \phi_1 = f_0 = f_2 \phi_2$. 即满足定义 1.3 中的(3). 现设 (B, g_0, g_1, g_2) 也满足 $g_0 = g_1 \phi_1 = g_2 \phi_2$, 则由推出的泛性质知存在唯一的 $\sigma: A \rightarrow B$ 使 $\sigma f_i = g_i (i = 1, 2)$ 且 $\sigma f_0 = \sigma f_1 \phi_1 = g_1 \phi_1 = g_0$. 所以 (A, f_1, f_2) 为半环正向系 $\{A_i, \phi_i; \Gamma\}$ 的正向极限.

参考文献:

[1] Golan J. S. Semirings and their applications[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1999.
 [2] 周伯璠. 同调代数[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
 [3] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules [M]. New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1973.
 [4] M. Scott Osborne. Basic Homological Algebra [M]. New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1998.

Some Characters On Direct Limit

XIAO Xian-min, HUANG Fu-sheng ZENG Hui-ping

(College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: In this paper, we verify the existence of the direct limit between semirings direct system $\{R_i; i \in \Omega\}$ and canonical morphisms of semirings $\delta_i: R_i \rightarrow R; \alpha \alpha/\xi$. and discuss some characters of semirings substain with some conditions between R and $\{R_i; i \in \Omega\}$.

Key words: direct limit; direct system; pushout.