第 24 卷第 5 期
2007 年 10 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.24 No.5
Oct., 2007

文章编号:1005—0523(2007)05—0005—04

基于多目标优化的病态逆问题求解

毛利军,陈少林

(南京航空航天大学 土木工程系,江苏 南京 210016)

摘要:针对科学和工程研究中的病态逆问题,提出了基于多目标优化的求解方法.该方法将各次观测所得问题方程组残差作为多目标,并进一步将该多目标转化为单一目标,通过遗传算法寻求问题最优解,从而利用多次观测的有效信息,达到稳定病态逆问题解的目的.数值算例表明,该方法在参数反演精度和抗噪方面,显著优于最小二乘法(LS);在中、低噪声水平上的相关性态优于 Tikhonov 正则化方法.

关 键 词:Tikhonov 正则化;最小二乘法;病态逆问题;多目标优化

中图分类号:O224,O241.2 **文献标识码**:A

0 引言

在科学和工程研究中,存在大量的逆问题[1].一般而言,逆问题大都是非适定的.非适定是指问题解的存在性、唯一性和稳定性等不能得到完全满足.通常可以通过增大或减小解空间来使存在性和唯一性得到满足.相比之下,满足稳定性更加困难而重要.实际问题中,观测和计算误差不可避免,没有稳定性就意味着误差可能无法控制地被放大,最终计算结果将与准确解相去甚远而失去任何意义.因此,在逆问题的研究中常常会面临求解具有病态系数矩阵的线性方程组的困难.

事实上,除非增加更多关于解的有效信息,满足解稳定性这一要求是不可能实现的.对此,Lanczos 强调指出:信息的缺乏不可能由任何数学上的技巧来弥补.目前,求解逆问题的主要方法有 Tikhonov 正则化方法、奇异值分解法(SVD)和截尾奇异值分解法(TSVD)等[2].这些方法实质上是在解的导数光滑、有界等方面的增加约束信息.但这类求解不适定问题的通用方法过于强调数学上的意义,没有充分联系病态问题的具体情况,不利于对具体病态问题本质的理解和研究.

为了挖掘和利用问题本身直接的信息,使病态逆问题求解具有实际的物理意义,本文提出了基于多目标优化的病态逆问题求解方法.该方法认为,在多次观测待解逆问题时,每个观测都包含逆问题一定的信息,将与每次测量对应的方程组右端量与左端量之残差做为优化目标,实现每次观测残差的多目标优化,便可有效利用多次观测的信息,实现病态逆问题的稳定求解.

1 多目标优化求解病态逆问题的基本原理

病态逆问题最终可归结为式(1)病态线性超定方程组的求解

$$Ax=b \tag{1}$$

其中 A 为病态系数矩阵;b 为通过观测获得的右端项;x 为待求量.求解式(1)的常规方法为最小二乘(LS)求解,即

$$x=(A^TA)^{-1}A^Tb \tag{2}$$

当系数矩阵 A 为病态时,由式(2)所得解的稳定性较差,为此可通过正则化方法求解.Tikhonov 正则化是最常用的正则化方法,其基本思路为寻求使式(3)最小化的正则解 x

收稿日期:2007—08—12
基金项目:国家自然基金项目(50508016/E080801)
作者简介:毛利军(1975—),男,山东泗水人,南京航空航天大学土木工程系博士,副教授.

$$\Omega(x)=\|Ax-b\|_2^2+\lambda^2\|L(x-x^*)\|_2^2 \quad (3)$$

其中，x^*为正则解的估计值，在估计值不能确定的情况下可取零向量；为依据经验确定的权重矩阵(本文算例中取单位矩阵)；为正则化系数，可由 L 曲线法确定[3~4].

研究表明，对离散不适定问题，$\log\|Ax-b\|_2$ 与 $\log\|L(x-x^*)\|_2$ 与的关系曲线总是呈现出 L 曲线形状，该关系曲线有一个明显的拐角，该拐角将曲线分为水平和垂直两部分. L 曲线水平部分对应于正则化误差占主导的解，这是因为随着正则化系数 λ 的增大，引入了较多滤波，解变得更平稳，因此 $\|L(x-x^*)\|_2$ 随正则化系数的变化很小；相反的，L 曲线垂直部分对应于扰动误差占主导的解，这是因为，随着正则化系数 λ 的减小，引入了较少的滤波，$\|L(x-x^*)\|_2$ 随正则化系数的变化很激烈，而 $\|Ax-b\|_2$ 则变化不大. 由此可以看出，L 曲线反映了最小化残差范数和最小化解的“大小”之间的一种平衡关系. 在给定误差下，存在一最优正则化系数，使得扰动误差和正则化误差之间达到平衡. L 曲线的一重要特征是：这一最优参数位于 L 曲线拐点附近. 因此，可通过寻找 L 曲线拐点作为最优正则化系数的近似，使得扰动误差和正则化误差之间达到较好的平衡.

以上分析表明，正则化系数 λ 控制着优化过程中给予残差范数与解范数的相对权重. λ 较大时，解范数较小而残差范数较大，λ 较小时，情况则相反. λ 过大时，方程组残差过大，正则解虽然非常稳定，但与真实解相距甚远；λ 过小时，与最小二乘法情况类似，方程组残差较小，但解的稳定性很差.

可见，在观测噪声存在的情况下，真实解总能使与病态逆问题对应的方程组残差较小，但不是最小. 考虑多次观测情况，对每次观测上述结论仍然成立. 为此，可将每次观测所得方程组残差作为多目标进行优化，问题的最优解应使该多目标同时处于较小水平. 即寻求最优解 x 使得

$$\min F(x) \quad (4)$$

其中 $F(x)=\{\|Ax-b_1^*)\|_2\ \|Ax-b_2^*)\|_2\ \|Ax-b_1^*)\|_m\}$

b_1^* 为第 i 次右端量的观测值，m 为总观测次数.

多目标优化的方法有很多[5]，考虑到式(4)各目标有相同的物理意义，为此可简单地将多目标优化问题转化为单目标优化问题求解，即寻求最优解 x 使得

$$\min \frac{\sum F(x)}{m} \quad (5)$$

其中，$\sum F(x)=\sum_{i=1}^{m}\|Ax-b_i^*)\|_2$.

该优化问题可通过遗传算法求解.

2　数值算例

为了验证本文方法的可行性，研究基于多目标优化求解病态逆问题方法的性态，考虑如下数学模型[6]. 病态系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 1 & -9.5 \\ -2 & 4 & 1 & -1.05 & 8.5 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 2.4 \\ -1 & 2.5 & 4 & -0.5 & 7 \\ -1 & 3.2 & 4 & -0.5 & 8.4 \\ 1 & 1 & -3 & 0.4 & 0.49 \\ 3 & 7 & -3 & 1.5 & 12.7 \\ 5 & -1 & -2 & 2.5 & -3 \\ 4 & 2 & -2 & 2.01 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

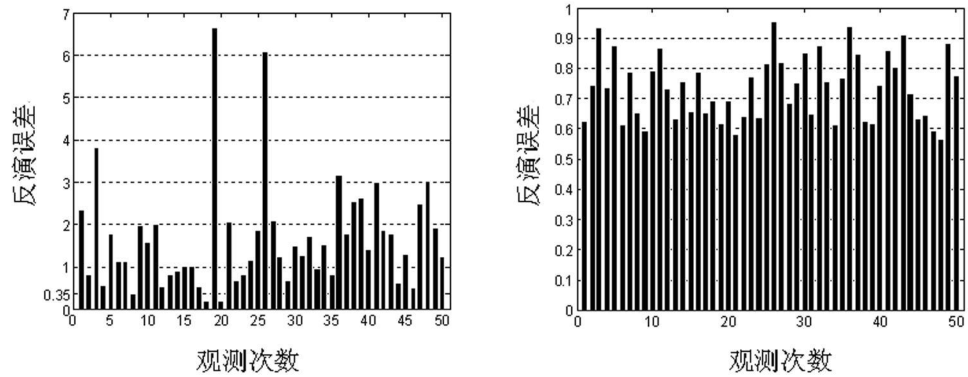
其相应法方程系数矩阵 $N=A^TA$ 的条件数为 $1.289\,2\times10^5$，病态性严重. 待求参数真值为 $x=[1\ 1\ 1\ 1\ 1]$. 观测噪声模型采用式(6)

$$b_i^*=b_i+ep\cdot N_{iose}\cdot b_i \quad (6)$$

其中 b_i^* 为右端项观测值；b_i 为右端项真值；ep 为噪声水平；N_{iose} 为均值为0，均方差为1的正态随机数.

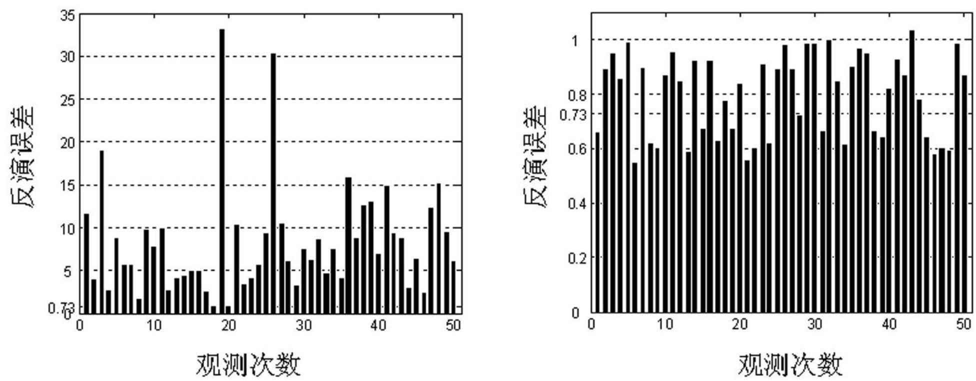
首先采用LS和Tikhonov正则化方法，对模型50次观测分别进行参数反演，然后采用多目标优化方法对所有观测进行参数反演，反演误差以 $\delta=\|x^*-x\|_2$ 表示，其中 x^* 为反演参数.

图1、图2和图3分别给出噪声水平为1%、5%和10%时，采用LS和Tikhonov正则化方法所得50次反演结果；表1给出噪声水平为1%、5%和10%时，采用多目标优化方法所得反演结果.



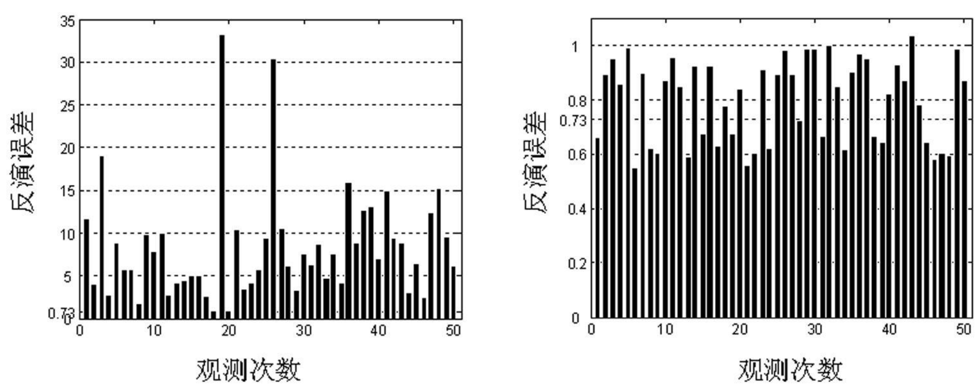
（a）LS方法　　（b）Tikhonov正则化方法

图 1　噪声水平为 1%时反演结果



（a）LS方法　　（b）Tikhonov正则化方法

图 2　噪声水平为 5%时反演结果



（a）LS方法　　（b）Tikhonov正则化方法

图 2　噪声水平为 10%时反演结果

表 1　基于多目标优化的参数反演结果

噪声水平/%	反演参数值	反演误差
1	[0.930 5,0.729 6,0.926 0,1.132 4,1.135 4]	0.35
5	[0.682 4,0.786 5,0.911 6,1.610 1,1.109 9]	0.73
10	[0.156 9,0.095 1,0.701 9,2.626 9,1.458 0]	2.12

由以上图表可知：

(1) 随着噪声水平的提高，三种方法反演误差都呈增大趋势．在噪声水平由 1%增至 10%的过程中，LS 方法平均反演误差由 1.66 增至 16.6，Tikhonov 正则化方法的平均反演误差由 0.74 增至 0.84，而基于多目标优化方法的反演误差由 0.35 增至 2.12．可见，LS 方法对观测噪声最为敏感，而 Tikhonov 正则化方法对观测噪声最为稳定；

(2) 由图 1、图 2 和表 1 知，在中、低水平观测噪声情况下，基于多目标优化方法的平均反演误差低于 LS 方法和 Tikhonov 正则化方法，具有反演误差小和反演误差稳定的优势；

(3) 由图 3 知，在较高水平噪声情况下，Tikhonov 正则化方法的平均反演误差仍然保持较低水平，具有 LS 法和基于多目标优化法所不能达到的反演精度.

3 结论

针对科学和工程研究中的病态逆问题，本文提出了基于多目标优化的求解方法.该方法通过寻求使多次观测所得问题方程组残差平均值的最小解，从而利用多次观测的有效信息，达到稳定病态逆问题解的目的.研究表明：

(1) 在各层次的观测噪声水平上，与 LS 法相比，基于多目标优化求解病态逆问题的方法，具有反演误差小和反演误差稳定的优势；

(2) 在中、低观测噪声水平上，与 Tikhonov 正则化方法相比，基于多目标优化求解病态逆问题的方法，在反演误差和反演误差稳定性等方面具有明显的优势；

(3) 在高噪声水平上，Tikhonov 正则化方法反演误差小，具有其他方法没有的优势.

需要指出，由于本文多目标优化求解是基于遗传算法的，因此最终反演精度受参数初始搜索范围影响较大，如能首先通过各类算法(如 Tikhonov 正则化方法)或根据先验信息最大程度地限定所求参数可行范围，将在各层次噪声水平上极大地提高参数反演精度.

参考文献：

[1] 黄光远，刘小军.数学物理反问题[M].济南：山东科学技术出版社，1993.

[2] 刘继军.不适定问题的正则化方法及应用[M].北京：科学出版社，2005.

[3] P·C·Hansen，Analysis of discrete ill－posed problems by means of the L－curve[J] SIAM Review，1992，34：561～580.

[4] P·C·Hansen，Regularization Tools：A Matlab package for analysis and solution of discrete ill－posed problems[J]，Numerical Algorithms，1994，(6)：1～35.

[5] 徐玖平，李　军.多目标决策的理论与方法[M].北京：清华大学出版社，2005.

[6] 冯光财，戴吾蛟，朱建军，陈正阳.基于虚拟观测的病态问题解法[J].测绘科学，2007，32(2)：38～39.

Resolution Strategy for Ill－posed Inverse Problems Based on Multi－objective Optimization

MAO Li-jun

(Civil Engineering Department of Nanjing University of Aerong Jiangshu Province 210016，China)

Abstract：The resolution strategy for ill－posed inverse problems encountered in science and engineering researches is put forward，based on multi－objective optimization.In the strategy，the residues of the equations of inverse problem corresponding with each measure are regarded as multi－objectives to be optimized，then the multi－objective is incorporated to one objective which can be optimized using genetic algorithm.Using the efficient information of each measure，the strategy gives a robust solution for the ill－pose inverse problem.Numerical examples show that the strategy's performances in solution precision and noise immunity are significantly better than least square method (LS) and Tikhonov regularization method when measurement noise lies in medium and low levels.

Key words：Tikhonov regularization；least square method (LS)；ill－posed inverse problem；multi－objective optimization