

文章编号: 1005—0523(2007)05—0039—05

异种材料填充开圆孔矩形薄板应力集中的弹性分析

马 方

(中铁二院工程集团有限责任公司, 四川 成都 610000)

摘要:通过对孔内填充异种材料矩形板的应力—应变分析, 导出了求解应力集中系数的精确公式, 并根据该问题的特点和材料弹性常数变化对应力集中现象影响的规律, 给出了应力集中系数计算的简化公式. 通过与有限元结果的比较证明了本文精确公式与简化公式的精度和可靠性.

关 键 词:孔内填充异种材料矩形板; 应力集中系数; 精确公式; 简化公式

中图分类号: TU45 **文献标识码:** A

1 前言

应力集中是工程结构中常见的问题, 一般指物体中应力梯度局部增高的现象, 常出现在物体形状急剧变化的地方, 如缺口, 孔洞, 沟槽以及有刚性约束处. 应力集中能使物体产生疲劳裂纹, 也能使脆性材料制成的零件发生静载断裂. 在应力集中处, 应力的最大值与物体的几何形状和加载方式等因素有关. 反映局部应力增高程度的参数称为理论应力集中系数, 它是峰值应力和不考虑应力集中时的名义应力的比值, 且与载荷的大小无关, 对受单向均匀拉伸的无限大薄板中的圆孔, 它等于 3^[1]. 工程构件的应力集中系数可以通过实验法 (如光弹法) 和数值法确定. 本文利用弹性理论对含圆孔有限大复合矩形薄板 (开孔板与孔内填充材料的弹性常数分别为 E, ν 和 E', ν') 两端均匀受拉的情况进行应力分析 (图 1), 根据孔边应力的分布规律, 将集中系数转化为弹性常数的函数, 推导出不同弹性常数复合板应力集中系数的表达式, 获得了复合材料的应力集中系数随不同弹性常数比值变化的结果, 并将其与 ANSYS 有限单元结果进行了比较, 验证了理论公式的精确度和正确性, 为解决工程实际问题提供了理论依据.

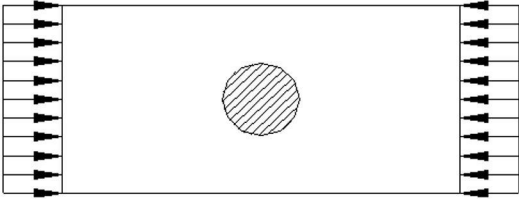


图 1 孔内填充异种材料矩形板

2 理论公式推导

设有一开圆孔矩形板, 在圆孔内密实填充有各向同性异种材料. 孔内填充异种材料的板在这里称为异种材料填充复合材料板. 设板与孔内填充部分的弹性常数分别为 E, ν 和 E', ν' . 根据受力特征设置开孔矩形板与小圆板的应力函数及所求得的应力分量如表 1^[2].

表 1 应力函数及应力分量

开孔板	小圆板
$U=A\ln \rho+C\rho^2+(B\rho^2+F+\frac{D}{\rho^2})\cos 2\varphi$	$U'=G\rho^2+(H\rho^2+I\rho^4)\cos 2\varphi$
$\sigma_{\rho}=\frac{A}{\rho^2}+2C-2(B+\frac{2F}{\rho^2}+\frac{3D}{\rho^4})\cos 2\varphi$	$\sigma'_{\rho}=2G-2H\cos 2\varphi$
$\sigma_{\varphi}=-\frac{A}{\rho^2}+2C-2(B+\frac{3D}{\rho^4})\cos 2\varphi$	$\sigma'_{\varphi}=2G+2(H+6I\rho^2)\cos 2\varphi$
$\tau_{\rho\varphi}=2(B-\frac{F}{\rho^2}-\frac{3D}{\rho^4})\sin 2\varphi$	$\tau'_{\rho\varphi}=2(H+3I\rho^2)\sin 2\varphi$

首先考虑小圆板：

$$\frac{\partial u'_{\rho}}{\partial \rho}=\epsilon'_{\rho}=\frac{1}{E'}(\sigma'_{\rho}-\nu'\sigma'_{\varphi})=\frac{1}{E'}[2G-2H\cos 2\varphi-\nu'(2G+2H\cos 2\varphi+12I\rho^2\cos 2\varphi)]$$

(1)

对 ρ 积分得 u'_{ρ}

$$u'_{\rho}=\frac{1}{E'}[(2G\rho(1-\nu')-2H\rho(1+\nu')\cos 2\varphi-4\nu I\rho^3\cos 2\varphi)+g(\varphi)]$$

(2)

又由于

$$\frac{u'_{\rho}}{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u'_{\rho}}{\partial \rho}=\epsilon'_{\varphi}=\frac{1}{E'}(\sigma'_{\varphi}-\nu'\sigma'_{\rho})=\frac{1}{E'}[2G(1-\nu')+2H(1+\nu')\cos 2\varphi+12I\rho^2\cos 2\varphi]$$

把 u'_{ρ} 的表达式代入上式并化简得

$$\frac{\partial u'_{\rho}}{\partial \varphi}=\frac{4}{E'}[H\rho(1+\nu')+I\rho^3(3+\nu')]\cos 2\varphi-g(\varphi)$$

(3)

两边对 φ 积分

$$u'_{\varphi}=\frac{2}{E'}[H\rho(1+\nu')+I\rho^3(3+\nu')]\sin 2\varphi-\int g(\varphi)d\varphi$$

(4)

一方面，

$$\gamma'_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u'_{\rho}}{\partial \varphi}+\frac{\partial u'_{\varphi}}{\partial \rho}-\frac{u'_{\varphi}}{\rho}=\frac{4}{E'}(1+\nu')(H+3I\rho^2)\sin 2\varphi+\frac{g'(\varphi)}{\rho}+\frac{\int g(\varphi)d\varphi}{\rho}$$

另一方面，

$$\gamma'_{\rho\varphi}=\frac{2(1+\nu')}{E'}\tau'_{\rho\varphi}=\frac{4}{E'}(1+\nu')(H+3I\rho^2)\sin 2\varphi$$
$$\Rightarrow \frac{g'(\varphi)}{\rho}+\frac{\int g(\varphi)d\varphi}{\rho}=0\Rightarrow g''(\varphi)+g(\varphi)=0$$

(5)

解微分方程得

$$g(\varphi)=c_1\sin \varphi+c_2\cos \varphi$$

(6)

把 $g(\varphi)$ 代入 u'_{ρ} , u'_{φ} 的表达式, 得

$$u'_{\rho}=\frac{1}{E'}[2G\rho(1-\nu')-2H\rho(1+\nu')\cos 2\varphi-4\nu I\rho^3\cos 2\varphi]+c_1\sin \varphi+c_2\cos \varphi$$

(7)

$$u'_{\varphi}=\frac{2}{E'}[H\rho(1+\nu')+I\rho^3(3+\nu')]\sin 2\varphi+c_1\cos \varphi-c_2\sin \varphi$$

(8)

同理, 对开孔矩形板做相似的推导可得出 u_{ρ} , u_{φ} 的表达式

$$u_{\rho}=\frac{1}{E}\left\{-\frac{A}{\rho}+2C\rho-2\left(B\rho-\frac{2F}{\rho}-\frac{D}{\rho^3}\cos 2\varphi-\nu\left[\frac{A}{\rho}+2C\rho+2\left(B\rho-\frac{D}{\rho^3}\right)\cos 2\varphi\right]\right\}\right.$$
$$\left. +c_3\sin \varphi+c_4\cos \varphi\right.$$

(9)

$$u_{\varphi}=\frac{2}{E}\left[B\rho(1+\nu)+\frac{D}{\rho^3}(1+\nu)+\frac{F}{\rho}(\nu-1)\right]\sin 2\varphi+c_3\cos \varphi-c_4\sin \varphi$$

(10)

由边界条件确定待定常数：

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{A}{\rho} + 2C - 2 \left(B + \frac{2F}{\rho^2} + \frac{3D}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi \right] = \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos 2\varphi \Rightarrow$$

$$2C - 2B \cos 2\varphi = \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos 2\varphi \Rightarrow$$

$$B = -\frac{q}{4}, C = \frac{q}{4} \quad (11-a)$$

$$2) (\sigma_\rho)_{\rho=a} = (\sigma'_\rho)_{\rho=a}$$

$$\frac{A}{a^2} + 2C - 2 \left(B + \frac{2F}{a^2} + \frac{3D}{a^4} \right) \cos 2\varphi = 2G - 2H \cos 2\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{A}{a^2} + 2C = 2G \quad (11-b)$$

$$B + \frac{2F}{a^2} + \frac{3D}{a^4} = H \quad (11-c)$$

$$3) (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a} = (\tau'_{\rho\varphi})_{\rho=a} \quad 2 \left(B - \frac{F}{a^2} - \frac{3D}{a^4} \right) \sin 2\varphi = 2(H + 3Ia^2) \sin 2\varphi \Rightarrow$$

$$B - \frac{F}{a^2} - \frac{3D}{a^4} = H + 3Ia^2 \quad (11-d)$$

$$4) (u_\rho)_{\rho=a} = (u'_\rho)_{\rho=a}$$

$$\frac{1}{E} \left\{ -\frac{A}{a} + 2Ca - 2 \left(Ba - \frac{2F}{a} - \frac{D}{a^3} \right) \cos 2\varphi - v \left[\frac{A}{a} + 2Ca + 2 \left(Ba - \frac{D}{a^3} \cos 2\varphi \right) \right] \right\} + c_3 \sin \varphi$$

$$+ c_4 \cos \varphi = \frac{1}{E'} [2Ga(1-v') - 2Ha(1+v') \cos 2\varphi - 4v'Ia^3 \cos 2\varphi] + c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{E} \left(-\frac{A}{a} + 2Ca - \frac{vA}{a} - 2vCa \right) = \frac{1}{E'} 2Ga(1-v') \quad (11-e)$$

$$\frac{1}{E} \left[-2 \left(Ba - \frac{2F}{a} - \frac{D}{a^3} - 2v \left(Ba - \frac{D}{a^3} \right) \right) \right] = \frac{1}{E'} [-2Ha(1+v') - 4v'Ia^3] \quad (11-f)$$

$$5) (u_\varphi)_{\rho=a} = (u'_\varphi)_{\rho=a}$$

$$\frac{2}{E} \left[Ba(1+v) + \frac{D}{a^3}(1+v) + \frac{F}{a}(v-1) \right] \sin 2\varphi + c_3 \cos \varphi - c_4 \sin \varphi$$

$$= \frac{2}{E'} [Ha(1+v') + Ia^3(3+v')] \sin 2\varphi + c_1 \cos \varphi - c_2 \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{2}{E} \left[Ba(1+v) + \frac{D}{a^3}(1+v) + \frac{F}{a}(v-1) \right] = \frac{2}{E'} [Ha(1+v') + Ia^3(3+v')] \quad (11-g)$$

联立方程(11-a)~(11-g),令 $k = E'/E$ 并代入前面已求出的 $B = -\frac{q}{4}$, $C = \frac{q}{4}$ 求得其他待定系数

$$A = \frac{qa^2(k-kv-1+v')}{2M} \quad D = \frac{qa^4(1+v'-k-kv)}{4N} \quad F = \frac{qa^2(k-1-v'+kv)}{2N}$$

$$G = \frac{kq}{2M} \quad H = \frac{kq}{N} \quad I = 0$$

其中: $M = k + kv - v' + 1$ $N = -3K - 1 - v' + kv$

最后,求出应力集中系数.将以上各系数代入 σ_φ , σ'_φ 的应力表达式,得

$$\sigma_\varphi = \frac{q}{2} + \frac{qa^2(1-v'-k-kv)}{2\rho^2 M} - \frac{q}{2} \left[1 + \frac{3a^4(k+kv-1-v')}{\rho^4 N} \right] \cos 2\varphi \quad (12)$$

$$\sigma'_\varphi = \frac{kq}{M} + \frac{2kq}{N} \cos 2\varphi \quad (13)$$

从而得矩形薄板,小圆板在交界处的应力集中系数分别为

$$K = \frac{(\sigma_\varphi)_A}{q} = 1 + \frac{1-v'-k+kv}{2(kv+k-v'+1)} + \frac{3(k+kv-1-v')}{2(kv-3k-v'-1)} \quad (14)$$

$$K' = \frac{(\sigma'_\varphi)_A}{q} = \frac{k}{kv+k-v'+1} - \frac{2k}{kv-3k-v'-1} \quad (15)$$

其中

$$k=\frac{E'}{E}$$

(16)

上式用于解决工程实际问题过于繁琐,取 $v=v'=0.25$ 代入并化简,得

$$K\approx\frac{k^2+82k+45}{(5k+3)(11k+5)}$$

(17)

$$K'\approx\frac{4k(21k+11)}{(5k+3)(11k+5)}$$

(18)

3 算例

矩形薄板 $a\times b=2\,000\,\text{mm}\times1\,000\,\text{mm}$,厚度 $t=50\,\text{mm}$,圆孔位于板的几何中心 $d=200\,\text{mm}$,板的短边受均布拉力 $T=1\,000\,\text{N}$.开孔板弹性模量为 E ,泊松比 $v=0.25$,填充的小圆板弹性模量为,泊松比 v' 为变化值.表 2 和表 3 分别给出了 $k=E'/E$ 取不同数值时用精确公式(14)和(15)计算得到的 K 、 K' 理论值,同时还列出了取 $v=v'=0.25$ 时用简化公式(17)和(18)计算得到的 K 、 K' 理论值和用 ANSYS 的有限单元数值解结果.

表 2 孔内填充异种材料矩形板应力集系数计算结果($v=0.25$)

计算方法	k v'	0	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	4
精确公式 (14) ①	0	3	2.689	2.441	2.066	1.429	0.956	0.582	0.333
	0.01	3	2.691	2.443	2.069	1.433	0.958	0.584	0.334
	0.025	3	2.694	2.448	2.075	1.438	0.961	0.585	0.335
	0.05	3	2.698	2.454	2.083	1.445	0.967	0.588	0.336
	0.125	3	2.709	2.471	2.106	1.467	0.981	0.596	0.340
	0.25	3	2.722	2.492	2.133	1.494	1.000	0.607	0.345
	0.3	3	2.726	2.498	2.141	1.501	1.006	0.610	0.347
	0.33	3	2.727	2.500	2.144	1.505	1.009	0.612	0.348
	0.4	3	2.729	2.504	2.149	1.511	1.014	0.616	0.350
最大差异%		0	1.5	2.6	4.0	5.7	6.1	5.7	5.1
简化公式 (17)②	0.25	3	2.722	2.492	2.133	1.494	1.000	0.607	0.345
有限元结果 ③	0.25	3.041	2.753	2.514	2.146	1.500	1.007	0.615	0.355
①和②最大误差%		0	1.2	2.1	3.3	4.5	4.7	4.2	3.5
②和③误差%		1.4	1.1	0.9	0.6	0.4	0.7	1.3	2.9

表 3 填充异种材料圆板应力集系数计算结果($v=0.25$)

计算方法	k v'	0	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	4
精确公式 (15) ①	0	0	0.135	0.246	0.418	0.729	0.978	1.187	1.333
	0.01	0	0.135	0.245	0.418	0.729	0.978	1.188	1.334
	0.025	0	0.134	0.245	0.417	0.729	0.979	1.189	1.335
	0.05	0	0.134	0.244	0.417	0.730	0.981	1.190	1.336
	0.125	0	0.133	0.243	0.417	0.733	0.987	1.196	1.341
	0.25	0	0.134	0.245	0.422	0.745	1.000	1.208	1.349
	0.3	0	0.135	0.248	0.427	0.751	1.007	1.213	1.352
	0.33	0	0.136	0.250	0.430	0.756	1.011	1.217	1.354
	0.4	0	0.141	0.257	0.440	0.769	1.022	1.225	1.359
最大差异%		0	4.1	4.7	5.3	5.5	4.6	3.2	2.0
简化公式 (18)②	0.25	0	0.134	0.245	0.422	0.745	1.000	1.208	1.349
有限元结果 ③	0.25	0	0.135 7	0.240 8	0.426 4	0.749 0	1.006 3	1.221 9	1.376 1
①和②最大误差%		0	5.2	4.8	4.3	3.2	2.3	1.8	1.2
②和③误差%		0	1.3	—1.7	1.0	0.5	0.6	1.2	2.0

由表 2 和表 3 知:① 当 ν 取固定值时 $\nu=0.25$, ν' 从 0 变化到 0.4, $k=E'/E$ 从 0 变化到 4, 由于 ν' 的变化引起的最大差异不超过 6.1%, 表明应力集中系数 K 和 K' 相对于 ν' 的变化并不敏感;② 当 $k=0$ 时, $k=3$, 与文献[1]的精确解相同;③ 用简化公式计算的结果与当取 $\nu=\nu'=0.25$ 时用精确公式计算结果完全一致, 并与有限元结果的最大误差不大于 3%, 表明本文精确公式和简化公式都是可靠地, 精确公式解就是其精确解, 简化公式结果也具有很好的精度;④ 当小圆内填充材料和矩形板材料相同 ($E'/E=1$, $\nu=\nu'=0.25$) 时, $K'=K=1$ (相当于无孔情况);当小圆内填充材料比矩形板软 ($E'/E<1$) 时, $1<K<3$, $0<K'<1$;当小圆内填充材料比矩形板硬 ($E'/E>1$) 时, $0<K<1$, $1<K'<1.5$.

4 结论

本文导出的求解孔内填充异种材料矩形板应力集中系数的计算公式是精确的, 近似公式也具有良好的精度和很好的适应性. 与有限元数值结果的比较证明了本文公式的可靠性.

参考文献:

[1] Science and Technology Committee of Aeronautical Industry Ministry. The Hand book of Stress Concentration Factors[M]. Beijing: Higher Education Press, 1990.

[2] Timosenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity[M]. Third Edition, New York: Mc Graw — Hill, 1990.

[3] Wu J L. Elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.

[4] Nishida M. Stress concentration. Chinese translation of original Japanese[M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1986.

[5] Tada H, Paris PC, Irwin G R. The stress analysis of cracks handbook[M]. Second edition, St. Louis Missouri: Paris Production Inc. 1985.

Stress Concentration Analysis of a Thin Compound Plate Wit Circular Holes Filled with Different Material

MA Fang

(China Railway Eryuan Engineering Group Co. Ltd, Sienan Chengdu 610000, China)

Abstract: A set of accurate formulations are derived by theoretic analysis to calculate stress concentration of thin compound plate with circular hole which is filled with different material. Meanwhile, a set of simplified fomulations are also given for convenience of real applications. The comparison among calculated results of stress concentration factors obtained by proposed accurate formulations, simplified formulations and finite element method by ANSYS shows that the proposed accurate formulations are reliable, and the simplified formulations have also good accuracy.

Key words: thin compound plate with circular hole filled with different material; stress concentration factor; elasticity; accurate fomulation, simplified fomulation