

文章编号: 1005—0523(2007)05—0142—02

图的循环自同构群

周尚超, 邓毅雄

(华东交通大学, 江西 南昌 330013)

摘要: 证明了对于 n 阶循环群 $C_n (n \geq 3)$, 存在 $3n$ 个点, $5n$ 条边的图 G_n , 且 G_n 的自同构群 $\Gamma(G_n)$ 与 C_n 同构.

关键词: 自同构群; 循环群; 图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

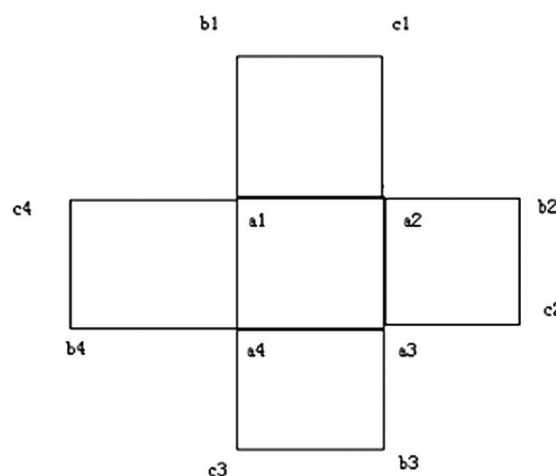
1 引言

本文采用[1]中的记号和术语. 图均指无向简单图. [1]中证明了对于任意有限抽象群 Γ , 都存在图 G , 使得 G 的自同构群与 Γ 同构, 但是对于 n 个点的置换群 Γ , 不一定存在 n 个点的图 G 以 Γ 为自同构群. 例如设 $\Gamma = \langle (v_1 v_2 \cdots v_n) \rangle$ 是由 $(v_1 v_2 \cdots v_n)$ 生成的循环群, 任意以 $\{v_1 v_2 \cdots v_n\}$ 为顶点的图的自同构群都不是 Γ . [1]中所述的图有较多的顶点和边, 对于循环群 C_n , Frucht 作出有较少顶点的图 Frucht 证明了^{[2][3]}. 若 $n \geq 3$, 则存在 $3n$ 个顶点的图 G_n , 有 $\Gamma(G_n)$ 同构于 C_n . 这里 $\Gamma(G_n)$ 表示图 G_n 的自同构群, C_n 是 n 阶循环群, 当 $n = 3, 4, 5$ 时, Sabidussi 构造出群为 C_n 有 $3n$ 个点 $6n$ 条边的图. Harary 和 Palmer 构造出这种图只有 $5n$ 条边^[1]. Frucht 用二次型 Q 定义图 G_n , $V(G_n) = \{a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ $Q(G_n) = \sum(a_i b_i + b_i c_i)$

$$+ \sum(a_j a_{j+1} + c_j a_{j+1}) \\ + a_1 a_n + a_1 c_n + \sum c_k c_l$$

二次型的每个项表示 1 条边, 在这个图中, 按二次型 Q , Frucht 构造的图是这样的: $A = \{a_1 a_2 \cdots a_n\}$ 导出的子图是圈 $a_1 a_2 \cdots a_n a_1$. $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 导出的子图是完全图, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 导出的子图是空图. a_i 与 b_j 邻接当且仅当 $i = j$; c_i 与 b_j 邻接当

且仅当 $i = j$; c_i 与 a_j 邻接当且仅当 $j = i + 1 \pmod n$; 在 [3] 中的图 G6.51.2 中画出了 $n = 4$ 的情形图 2. 我们指出这个图的群不是 4 阶循环群, 他少画了 1 条边, 应把 $c_1 c_3$ 邻接才对. 按 Frucht 的方法, $Q(G_n)$ 的最后 1 项是 $c_k c_l$ 表明用 c 标志的任意 2 点是邻接的. 我们将群为 C_4 的图按所述作如下图. 任意 2 个 c 是邻接的图中未画出(那样会显得乱)



Frucht 的图有较多的边(共 $(n^2 + 7n)/2$ 条), 本文构造出群为 C_n 有 $3n$ 个点 $5n$ 条边的图, 比 Frucht 的 $(n^2 + 7n)/2$ 条边少.

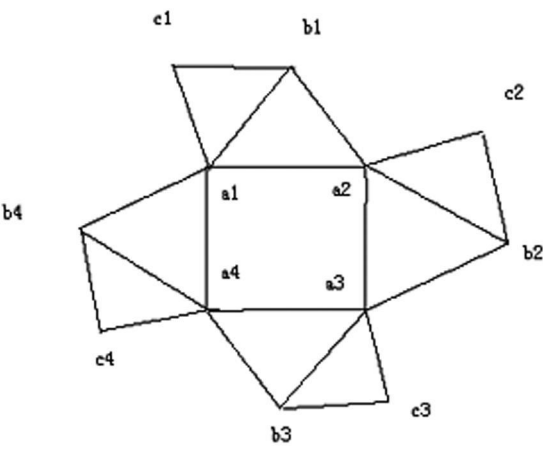
定理 若 $n \geq 3$, 则存在 $3n$ 个点的图 G_n , 使 $\Gamma(G_n)$ 与 C_n 同构且 G_n 有 $5n$ 条边.

收稿日期: 2007—07—19

基金项目: 江西省自然科学基金项目(051106); 国家自然科学基金项目(10661007).

作者简介: 周尚超(1948—), 男, 云南蒙自人, 教授.

证明 G_n 的顶点是 $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, \dots, n, A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 导出的子图是圈 $a_1 a_2 \dots a_n a_1 \cdot B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\} C=\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 导出的子图是空图 a_i 与 b_j 邻接当且仅当 $i=j; c_i$ 与 b_j 邻接当且仅当 $i=j; c_i$ 与 a_j 邻接当且仅当 $j=i$. 下图给出了 $n=4$ 时的图 G_4 . 令 $s=(a_1 a_2 \dots a_n)(b_1 b_2 \dots b_n)(c_1 c_2 \dots c_n)$, 则 s 是 G_n 的自同构. A 中点的度是 5, B 中点的度是 3, C 中点的度是 2. 因此对于 G_n 的任意自同构 t , 有 $t(A)=A, t(B)=B, t(C)=C$. 当 t 限制在 A 上时是 $G(A)$ 的自同构. 若 $t(a_1)=a_1$, 则与 a_1 邻接的度为 2 的点 c_1 映射为 c_1 , 即 $t(c_1)=c_1$. 与 c_1 和 c_1 都邻接的度为 3 的点 b_1 映射为 a_1 和 c_1 都邻接的度为 3 的点 b_1 , 即 $t(b_1)=b_1$, 由此可推出 $t(a_2)=a_2, t(c_2)=c_2, t(b_2)=b_2, \dots$, 因此由 $t(a_1)=a_1$ 可推出 $t=E$. E 为群的单位元. 根据群论, 含 a_1 的轨道有 n 个元素. G_n 的自同构只有 n 个元素. G_n 的自同构群是 n 阶循环群 $\langle s \rangle$. 它的边数为 $(5n+3n+2n)/2=5n$.



参考文献:

[1] F. 哈拉里. 图论(李蔚萱译)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[2] Frocht, R. Graphs of degree three with a given abstract group [J], Canada J. Math. 1949, (1), 365—378

[3] 卡波边科, 莫鲁桌. 图论的例和反例[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1988

The Graph with Cyclic Automorphism Group

ZHOU Shang-chao, DENG Yi-xiong

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we exhibited graphs G_n with Cyclic group C_n and G_n has $3n$ points and $5n$ lines ($n \geq 3$).
Key words: graph; automorphism group; cyclic group;