

文章编号: 1005-0523(2007)05-0144-04

关于图的反符号边控制

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西南昌 330013)

摘要: 引入了图的反符号边控制的概念, 设 $G=(V, E)$ 是一个图, 一个函数 $f: e \rightarrow \{-1, +1\}$ 如果对任意 $e \in E(G)$, 均有 $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \leq 0$, 则称 f 为图 G 的一个反符号边控制函数. 图 G 的反符号边控制数定义为 $\gamma_s(G) = \max \{ \sum_{e \in E} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号边控制函数} \}$. 在本文中, 我们主要给出了图的反符号边控制数的两个上界, 并确定了几类特殊图的反符号控制函数.

关键词: 反符号边控制函数、反符号边控制数、符号边控制函数、符号边控制数.

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

1 引言及定义

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1].

设 $G=(V, E)$ 为一个图, 其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$, 对于任意 $u \in V(G)$, 则 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的邻域, $N_G[u]=N_G(u) \cup \{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭邻域. 若 $S \subseteq V$ 则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图.

若 $e=uv \in E(G)$ 则 $N_G(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边集, 称为 e 在 G 中的边邻域, $N_G[e]=N_G(e) \cup \{e\}$ 为 e 在 G 中的闭边邻域. G 表示 G 的补图. 为了方便, 在不混淆情况下, $N_G(u)$ 、 $N_G[u]$ 、 $d_G(u)$ 、 $N_G[e]$ 和分别简记为 $N(u)$ 、 $N[u]$ 、 $d(u)$ 、 $N(e)$ 和 $N[e]$. 对于 $e=uv \in E(G)$, 则 $d_g(e) = |N_G(e)|$ 称为 e 在 G 中的度, 显然有 $d_G(e) = d_G(u) + d_G(v) - 2$. $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别为图 G 的最大度和最小度.

近些年来, 图的控制理论的研究内容越来越丰富. 加拿大著名图论专家 E.J.Cockayne[2] 等人先后引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式. 1998 年美国图论学者 W.T.Haynes 等人出版了两部专著[3~4], 较为系统地综述了近期的一些主要研究成果. 然而值得注意的是, 几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言, 很少涉及图的边控制问题. 为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容, 我们已将图的点控制概念转向研究图的边控制问题, 并获得了初步的研究成果, 如符号边控制[5~6]、符号星控制[6~7]、符号圈控制[8]等. 然而, 图的边控制中存在许多未解决的问题的猜想, 它们不仅与一些实际问题相联系(如局部占优设计问题等), 而且与某些特殊的符号边控制相关. 为此我们将引入图的反符号边控制概念.

对于一个实值函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 和一个子集 $S \subseteq E(G)$, 则记 $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$.

定义 1^[5~6] 设 $G=(V, E)$ 为一个非空图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$, 如果对每一条边 $e \in E$, 均有成立, 则称 f 为图 G 的一个符号边控制函数, 图 G 的符号边控制数定义为

$\gamma'_s(G) = \min \{ f(E) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的符号边控制函数} \}$. 对于空图 K_n , 定义 $\gamma'_s(K_n) = 0$.

对于图的符号边控制, 已有较多的研究成果[5~8]. 下面引入图的一种新的控制概念.

定义 2 设 $G=(V, E)$ 是一个非空图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$ 如果对任意 $e \in E(G)$, 均有 $f(N[e]) \leq$

收稿日期: 2007-07-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10661007)

作者简介: 徐保根(1963—), 男, 教授, 江西南昌人.

0, 则称 f 为图 G 的一个反符号边控制函数. 图 G 的反符号边控制数定义为 $\gamma_s(G) = \max \{f(E) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号边控制函数}\}$.

同样地, 对于空图 K_n , 定义 $\gamma_s(K_n) = 0$. 由上述定义不难看出两个引理.

引理 1 对任意图 G , 均有 $\gamma_s(G) \equiv |E(G)| \pmod{2}$.

引理 2 对任意两个交的图 G 和 H , 均有 $\gamma_s(G \cup H) = \gamma_s(G) + \gamma_s(H)$.

引理 3^[5] 对于任意 n 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 均有 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n a_i)^2$ 成立.

在本文中, 我们主要给出了图的反符号边控制数的界限, 确定了几类特殊图的反符号控制函数.

2 反符号边控制数的上界

本节我们给出图的反符号边控制数的两个上界.

定理 1 对于任意图 G , $\beta = \beta(G)$ 为图 G 的点独立数, 则有

$$\gamma_s(G) \leq \frac{(\Delta - \delta) \Delta^\beta}{2\Delta - 1}$$

其中 Δ 和 δ 分别为图 G 的最大度和最小度.

证明 设 f 为图 $G = (V, E)$ 的一个反符号边控制函数, 且使得 $\gamma_s(G) = f(E)$.

令: $A = \{e \in E(G) \mid f(e) = 1\}$, $B = \{e \in E(G) \mid f(e) = -1\}$, 可见 $\gamma_s(G) = |A| - |B|$.

定义 G 的两个生成子图 G_1 和 G_2 如下:

$$V(G_1) = V(G_2) = V(G); E(G_1) = A, E(G_2) = B;$$

对于每一个顶点 $u \in V(G)$, 定义 u 点的度差: $d^*(u) = d_{G_1}(u) - d_{G_2}(u)$, 显然, $\gamma_s(G) = |E(G_1)| - |E(G_2)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} d^*(u)$ 即有

$$\sum_{u \in V(G)} d^*(u) = 2\gamma_s(G) \quad (1)$$

对任意 $e = uv \in E(G)$, 由定义 1 知: $f(N[e]) = \sum_{e' \in N(e)} f(e') \leq 0$, 注意到点度差的定义, 即有 $d^*(u) + d^*(v) - f(uv) \leq 0$, 从而有 $\sum_{uv \in E(G)} (d^*(u) + d^*(v) - f(uv)) \leq 0$, 即有

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) d^*(u) - \gamma_s(G) \leq 0 \quad (2)$$

令: $X = \{u \in V(G) \mid d^*(u) \geq 1\}$, $Y = \{u \in V(G) \mid d^*(u) \leq 0\}$. 显然 $V(G) = X \cup Y$ 且 $X \cap Y = \emptyset$.

由反符号边控制函数的定义得知: X 中的任何两点在 G 中是不邻接的, 否则, 若存在 $u, v \in X$ 使得 $uv \in E(G)$, 则有 $f(N[uv]) = d^*(u) + d^*(v) - f(uv) \geq 1$, 矛盾. 因此, X 为图 G 的一个点独立集, 即有 $|X| \leq \beta$. 由 (2) 得知: $\sum_{u \in V(G)} d_G(u) d^*(u) \leq \gamma_s(G)$, 从而 $\delta \sum_{u \in X} d^*(u) + \Delta \sum_{u \in X} d^*(u) \leq \gamma_s(G)$, 即有

$$\Delta \sum_{u \in V(G)} d^*(u) \leq \gamma_s(G) + (\Delta - \delta) \sum_{u \in X} d^*(u) \leq \gamma_s(G) + (\Delta - \delta) \Delta^\beta. \text{ 并且结合 (1) 式得到 } (2\Delta - 1) \gamma_s(G) \leq (\Delta - \delta) \Delta^\beta, \text{ 至此定理 1 证毕.}$$

由上述理 1 得到下面推论.

推论 1 对于任意正则图 G , 均有 $\gamma_s(G) \leq 0$.

定理 2 对于任意 n 阶图 G , 若 $\Delta = \Delta(G) \geq \delta(G) \geq 1$, 则有

$$\gamma_s(G) \leq \frac{(2\Delta - 3)n}{4}$$

证明 当时 $\Delta = \delta = 1$, 此时 n 为偶数, 且 $G = \frac{n}{2} K_2$, 由引理 2 知 $\gamma_s(G) = -\frac{n}{2} \leq \frac{(2\Delta - 3)n}{4}$, 定理成立. 下设 $\Delta \geq 2$.

设 f 为图 G 的一个反符号边控制函数, 且使得 $\gamma_s(G) = f(E) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$ 成立.

令: $A = \{e \in E(G) \mid f(e) = 1\}$, $B = \{e \in E(G) \mid f(e) = -1\}$.

记: $|A| = s$, $|B| = t$, 可见 $n = s + t$, $\gamma_s(G) = s - t$.

定义图 G 的一个生成子图 H 如下: $V(H) = V(G)$, $E(H) = A$. 由引理 3, 则有 $\sum_{e \in A} d_H(e) = \sum_{u \in A} (d_H(u) + d_H(v) - 2) = \sum_{u \in V(G)} (d_H(u))^2 - 2s$

$$\geq \frac{1}{n} \left(\sum_{u \in V(H)} d_H(u) \right)^2 - 2s = \frac{1}{n} (2|E(H)|)^2 = \frac{4s^2}{n} - 2s$$

因此, A 中至少存在一条边 e_0 使得 $d_H(e_0) \geq \frac{4s}{n} - 2$, $N_G[e_0]$ 中至少有 $\frac{4s}{n} - 1$ 条 A 中的边, 由定义 2 知: $N_G[e_0]$ 中也至少有 $\frac{4s}{n} - 1$ 条 B 中的边, 从而有 $|N_G[e_0]| \geq \frac{4s}{n} - 1 + \frac{4s}{n} - 1 = \frac{8s}{n} - 2$, 注意到 $2\Delta - 1 \geq$, 故, $|N_G[e_0]| \geq \frac{8s}{n} - 2$, 故 $s \leq \frac{(2\Delta+1)n}{8}$, 因此 $\gamma_s(G) = s - t = 2s - n \leq \frac{(2\Delta+1)n}{4} - n = \frac{(2\Delta-3)n}{4}$, 定理 2 证毕.

3 特殊图的反符号边控制数

本节我们考虑几类特殊图的反符号边控制数, 确定 n 阶路 P_n , n 阶圈 C_n 和轮图的反符号边控制数.

定理 3 设整数 $n \geq 3$, 则有 (1) $\gamma_s(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - n + 1$; (2) $\gamma_s(C_n) = 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - n$.

证明 (1) 设 f 为 P_n 为一个反符号边控制函数且使得 $\gamma_s(P_n) = f(E(P_n))$. 令 $M = \{e \in E(P_n) \mid f(e) = 1\}$. 由反符号边控制函数的定义知: 对于每一条边 $e \in E(P_n)$, $N[e]$ 中至多只有一条边在 M 中, 从而有 $|M| \leq \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$. 即有

$$\gamma_s(P_n) = 2|M| - |E(P_n)| \leq \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - n + 1 \quad (3)$$

另一方面, 记 $(P_n) = (v_1 v_2 v_3 \cdots v_n)$, 这里 $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. 定义一个函数 $f: E(P_n) \rightarrow \{-1, +1\}$ 如下:

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{当 } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ 时;} \\ -1 & \text{否则;} \end{cases}$$

不难验证: f 为 P_n 为一个反符号边控制函数, 且有 $\gamma_s(P_n) \geq f(E(P_n)) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - n + 1$. 结合 (3) 式, 定理中结论 (1) 证毕.

(2) 类似于与结论 (1) 的证明可得 $|M| \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. 即有

$$\gamma_s(P_n) = 2|M| - |E(C_n)| \leq 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - n \quad (4)$$

另一方面, 可在 $E(C_n)$ 中选择 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 条边组成集合 N , 使得对于任意, $e \in E(C_n)$, $N[e]$ 中至多包含一条 N 中边. 定义 $f: E(C_n) \rightarrow \{-1, +1\}$ 如下:

$$f(e) = \begin{cases} 1 & \text{当 } e \in N \text{ 时;} \\ -1 & \text{否则;} \end{cases}$$

不难验证: f 为 C_n 为一个反符号边控制函数, 且有 $\gamma_s(C_n) \geq f(E(C_n)) = 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - n$. 结合 (4) 式, 定理 3 证毕.

定理 4 对于任意 $n+1$ 阶轮图 $W_{n+1} = C_n + K_1$ ($n \geq 3$), 均有 $\gamma_s(W_{n+1}) \leq -\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

证明 记 $G = W_{n+1}$, $V(W_{n+1}) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 其中 v_0 为其中心点, 圈 C_n 上的点依次为 $v_1, v_2, \dots, v_n$, f 为 $G = W_{n+1}$ 的反符号边控制函数且使得 $\gamma_s(G) = f(E(G))$. 记 W_{n+1} 中以 v_0 为中心的 $n+1$ 阶星为 S_{n+1} , 即, $V(S_{n+1}) = V(G)$, $E(S_{n+1}) = \{v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $C_n = W_{n+1} - v_0$. 为了方面, 我们记 $f(S_{n+1}) = f(E(S_{n+1}))$, $f(C_{n+1}) = f(E(S_{n+1}))$.

由定义 2 知: 对于每条边 $e \in E(C_n)$, 均有 $f(N[e]) \leq 0$, 注意到 $|N[e]| = 5$ 为奇数, 从而, $f(N[e]) \leq -$

1, 因此 $\sum_{e \in E(C_n)} f(N[e]) \leq -n$, 这等价于

$$2f(S_{n+1}) + 3f(C_n) \leq -n \quad (5)$$

(1) 若 $f(S_{n+1}) \leq 0$ 则由 (5) 得 $\gamma_s(W_{n+1}) = f(S_{n+1}) + f(C_n) \leq \frac{f(S_{n+1}) - n}{3} \leq -\frac{n}{3}$, 注意到 $n \geq 3$ 为整数,

故 $\gamma_s W_{n+1} \leq -\lceil \frac{n}{3} \rceil$? 定理成立.

(2) 若 $f(S_{n+1}) \geq 1$; 则由定义 2 知: 对于每条边 $v_0 v_i \in E(S_{n+1})$, 均有 $f(N[v_0 v_i]) \leq 0$, 因此 $f(S_{n+1}) \leq 2$, 并且对于每条边 $e \in E(C_n)$, 均有 $f(e) = -1$, 即 $f(C_n) = -n$. 注意到 $n \geq 3$, $\gamma_s(W_{n+1}) = f(S_{n+1}) + f(C_n) \leq 2 - n \leq -\frac{n}{3}$ 即, 由 $\gamma_s(W_{n+1})$ 为整数, 故 $\gamma_s(W_{n+1}) \leq -\lceil \frac{n}{3} \rceil$. 定理证毕.

参考文献:

- [1] J. A. Bondy, V. S. R. Murty, Graph Theory with Applications[M], Elsevier, Amsterdam, 1976
- [2] E. J. Cockayne, C. M. Mynhart, On a generalization of signed domination functions of graphs[J], Ars. Combin. 43 (1996) 235~245.
- [3] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Domination in graphs[M], New York: Marcel Dekker, INC, 1998.
- [4] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Fundamental of domination in graphs[M], New York: Marcel Dekker, INC 1998.
- [5] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math. 239 (2001) 179~189
- [6] Baogen Xu, On edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math. 294 (2005) 311~316
- [7] Baogen Xu, Two classes of edge domination in graphs[J]. Discrete Appl. Math. 154 (2006) 1541~1546.
- [8] 徐保根, 周尚超, 图与补图的符号圈控制数, 江西师范大学学报(理科版) 3(2006) 249~251.

On Reverse Signed Edge Domination in Graphs

XU Bao-gen

(Department of Mathematics, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper we introduce the concept of minus edge domination in graphs. Let $G = (V, E)$ be a graph, a function $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$ is said to be a reverse signed dominating function (RSEDF) of G if $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \leq 0$ holds for every edge $e \in E$, the reverse signed domination number of G is defined as $\gamma_s(G) = \max \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ is a RSEDF of } G \}$. In this paper we obtain two upper bounds of $\gamma_s(G)$ for general graphs G , and determine the exact values of $\gamma_s(G)$ for some special classes of graphs G .

Key words: reverse signed edge dominating function; reverse signed edge domination number; signed edge dominating function; signed edge domination number.