

文章编号: 1005—0523(2007)05—0153—04

一个几何不等式的加强

刘 健

(华东交通大学初等数学研究所, 江西 南昌 330013)

摘要: 根据一个已知的几何不等式, 应用差分代换方法并借助于 Maple 软件进行计算, 证明了下述几何不等式: 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有 $\sum \frac{PA}{w_b + w_c} \geq \sqrt{2}$ (其中 w_a, w_b, w_c 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线), 给出了它的几个推论, 提出并应用计算机验证了两个猜想.

关键词: 三角形; 内角平分线; 点; 差分代换; 不等式.

中图分类号: O178

文献标识码: A

1 引言

在文献[1]中, 作者提出了以下猜想(see [4]): 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$\frac{PA}{w_b + w_c} + \frac{PB}{w_c + w_a} + \frac{PC}{w_a + w_b} \geq 1, \quad (1)$$

其中 w_a, w_b, w_c 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的内角平分线.

事实上, 不等式是很容易证明的: 注意到已知的重要不等式(参见[2]):

$$PA \cos \frac{A}{2} + PB \cos \frac{B}{2} + PC \cos \frac{C}{2} \geq s \quad (2)$$

(s 为 $\triangle ABC$ 的半周长)等价于

$$\frac{PA}{\sqrt{(r_c + r_a)(r_a + r_b)}} + \frac{PB}{\sqrt{(r_a + r_b)(r_b + r_c)}} + \frac{PC}{\sqrt{(r_b + r_c)(r_c + r_a)}} \geq 1, \quad (3)$$

其中 r_a, r_b, r_c 为 $\triangle ABC$ 相应边上的旁切圆半径. 另外利用 Cauchy 不等式容易证得半对称不等式:

$$\sqrt{(r_c + r_a)(r_a + r_b)} \geq w_b + w_c, \quad (4)$$

相应的另两式也成立, 于是知不等式(1)成立.

注意到三角形中线长不小于相应的内角平分线之长, 作者早曾考虑并证明了不等式(1)的以下加强:

$$\frac{PA}{m_b + m_c} + \frac{PB}{m_c + m_a} + \frac{PC}{m_a + m_b} \geq 1, \quad (5)$$

其中 m_a, m_b, m_c 为 $\triangle ABC$ 相应边上的中线. 由此可迅速推得文献[3]中指出的不等式:

$$\frac{PB + PC}{m_a} + \frac{PC + PA}{m_b} + \frac{PA + PB}{m_c} \geq 4. \quad (6)$$

最近, 作者从另一个角度出发考虑不等式(1)的加强, 获得如下结果:

定理 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$\frac{PA}{\sqrt{w_b^2 + w_c^2}} + \frac{PB}{\sqrt{w_c^2 + w_a^2}} + \frac{PC}{\sqrt{w_a^2 + w_b^2}} \geq 2, \quad (7)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立.

2 定理的证明

引理 1 设 $\triangle ABC$ 的边长 BC 、 CA 、 AB 分别为 a 、 b 、 c ，则对任意一点 P 有

$$(b+c)PA + (c+a)PB + (a+b)PC \geq 2\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}, \quad (8)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立.

这个引理的不等式实为以下重要的涉及任意两点 P 、 Q 的几何不等式(见[4] P₂₉₈定理 A):

$$\frac{PA \cdot QA}{bc} + \frac{PB \cdot QB}{ca} + \frac{PC \cdot QC}{ab} \geq 1 \quad (9)$$

的一个推论(利用 Brocard 点至顶点的距离公式导出). 不等式(8)的一个直接证明参见[5].

引理 2 设 $t \geq 0$, 则

$$23t^3 + 26t^2 - 14t + 37 > 0. \quad (10)$$

利用导数易证上述结论, 从略.

定理的证明 将不等式(7)与不等式(8)中 PA 、 PB 、 PC 前的系数进行比较, 就知要证定理的不等式(7)只要证半对称三角形不等式:

$$w_b^2 + w_c^2 \leq \frac{2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)}{(b+c)^2} \quad (11)$$

及相应的另两式, 由角平分线公式可知上式等价于

$$\frac{4ca(s-b)s}{(c+a)^2} + \frac{4ab(s-c)s}{(a+b)^2} \leq \frac{2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)}{(b+c)^2}.$$

利用 $2s = a + b + c$ 进而可知上式等价于

$$2(c+a)^2(a+b)^2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a(a+b+c)(b+c)^2[c(c+a-b)(a+b)^2 + b(a+b-c)(c+a)^2] \geq 0. \quad (12)$$

令 $s-a=x$, $s-b=y$, $s-c=z$, 则有 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. 以此代入上式并两边除以 2. 于是知其等价于有关正数 x , y , z 的不等式:

$$F \equiv (x+2y+z)^2(x+2z+y)^2[(z+x)^2(x+y)^2 + (x+y)^2(y+z)^2 + (y+z)^2(z+x)^2] - 2(x+y+z)(y+z)(2x+y+z)^2[y(x+y)(x+y+2z)^2 + z(x+z)(x+z+2y)^2] \geq 0. \quad (13)$$

由于 y 与 z 关于 F 对称, 为证上式不妨设 $y \geq z$. 在此假设下, x 与 y , z 间的关系可分为以下三种情形:
(i) $y \geq z \geq x$; (ii) $x \geq y \geq z$; (iii) $y \geq x \geq z$.

在 $y \geq z \geq x$ 的情形下, 可设 $z = x + n$, $y = x + n + m$ (其中 $m \geq 0$, $n \geq 0$), 此时得:

$$F = (4x+3n+2m)^2(4x+3n+m)^2[(2x+n)^2(2x+n+m)^2 + (2x+n+m)^2(2x+2n+m)^2 + (2x+2n+m)^2(2x+n)^2] - 2(2x+2n+m)(3x+2n+m)(3x+2n+m)(4x+2n+m)^2 \cdot [(x+n+m)(2x+n+m)(4x+3n+m)^2 + (x+n)(2x+n)(4x+3n+2m)^2].$$

应用 Maple 软件展开整理后得

$$F = (640m^2 + 1792nm + 1792n^2)x^6 + 64(m+2n)(23m^2 + 57nm + 57n^2)x^5 + (1416m^4 + 8752mn^3 + 21024n^2m^2 + 24544n^3m + 12272n^4)x^4 + 4(m+2n)(182m^4 + 1081nm^3 + 2445n^2m^2 + 2728n^3m + 1364n^4)x^3 + (210m^6 + 2058nm^5 + 8274n^2m^4 + 17840n^3m^3 + 22440n^4m^2 + 16224n^5m + 5408n^6)x^2 + 2(m+2n)(16m^6 + 157nm^5 + 615n^2m^4 + 1270n^3m^3 + 1520n^4m^2 + 1062n^5m + 354n^6)x + 2m^8 + 28nm^7 + 165n^2m^6 + 540n^3m^5 + 1088n^4m^4 + 1410n^5m^3 + 1184n^6m^2 + 612n^7m + 153n^8,$$

于是有 $F \geq 0$, 即不等式(13)成立.

在 $x \geq y \geq z$ 的情形下,可设 $y = z + n, x = z + n + m (m \geq 0, n \geq 0)$, 此时得

$$F = (4z + 3n + m)^2(4z + 2n + m)^2[(2z + n + m)^2(2z + 2n + m)^2 + (2z + 2n + m)^2(2z + n)^2 + (2z + n)^2(2z + n + m)^2] - 2(2z + n)(3z + 2n + m)(4z + 3n + 2m)^2 \cdot [(z + n)(2z + 2n + m)(4z + 2n + m)^2 + z(2z + n + m)(4z + 3n + m)^2].$$

展开后整理得

$$F = 128(14m^2 + 14nm + 5n^2)z^6 + 64(54m^3 + 165nm^2 + 125n^2m + 37n^3)z^5 + 8(334m^4 + 1748nm^3 + 2948n^2m^2 + 1814n^3m + 457n^4)z^4 + 4(264m^5 + 1996nm^4 + 5470n^2m^3 + 6609n^3m^2 + 3443n^4m + 754n^5)z^3 + 2(112m^6 + 1128nm^5 + 4384n^2m^4 + 8322n^3m^3 + 7977n^4m^2 + 3619n^5m + 701n^6)z^2 + 2(m + 2n)(12m^6 + 130nm^5 + 530n^2m^4 + 1038n^3m^3 + 1012n^4m^2 + 457n^5m + 87n^6)z + (m^6 + 12nm^5 + 52n^2m^4 + 106n^3m^3 + 106n^4m^2 + 48n^5m + 9n^6)(m + 2n)^2.$$

可见,这时也有 $F \geq 0$, 即不等式(13)成立.

在 $y \geq x \geq z$ 的情形下,可设 $x = z + n, y = z + n + m (m \geq 0, n \geq 0)$, 此时得

$$F = 128(5m^2 - 4nm + 5n^2)z^6 + 64(23m^3 + 26nm^2 - 14n^2m + 37n^3)z^5 + 8(177m^4 + 534nm^3 + 248n^2m^2 + 14n^3m + 457n^4)z^4 + 4(182m^5 + 881nm^4 + 1239n^2m^3 + 377n^3m^2 + 327n^4m + 754n^5)z^3 + 2(105m^6 + 693nm^5 + 1605n^2m^4 + 1416n^3m^3 + 397n^4m^2 + 587n^5m + 701n^6)z^2 + 2(m + 2n)(16m^6 + 101nm^5 + 223n^2m^4 + 180n^3m^3 + 32n^4m^2 + 65n^5m + 87n^6)z + (2m^6 + 12nm^5 + 25n^2m^4 + 18n^3m^3 + n^4m^2 + 6n^5m + 9n^6)(m + 2n)^2.$$

显然有 $5m^2 - 4nm + 5n^2 > 0$. 另由引理 2 有 $23m^3 + 26nm^2 - 14n^2m + 37n^3 > 0$. 于是可知当 $y \geq x \geq z$ 时有 $F \geq 0$.

综上,即知不等式(13)对于任意正数 x, y, z 成立,从而不等式(11)获证(易知其等号仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立),相应于(11)的另两式自然也成立,于是定理的不等式(7)获证,且易知等号成立的条件.

3 讨论

在定理的不等式中,令 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,则有 $PA = \frac{2}{3} m_a$ 等,从而得中线与内角平分线的下述不等式:

推论 1 在 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{m_a}{\sqrt{w_b^2 + w_c^2}} + \frac{m_b}{\sqrt{w_c^2 + w_a^2}} + \frac{m_c}{\sqrt{w_a^2 + w_b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

注意到 $w_b^2 \leq s(s - b), w_c^2 \leq s(s - c)$, 因此由(7)式可得 PA, PB, PC 与边长的下述不等式:

推论 2 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$\frac{PA}{\sqrt{a}} + \frac{PB}{\sqrt{b}} + \frac{PC}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a + b + c}. \tag{15}$$

应用 *Cauchy* 不等式与不等式(15)又易得以下简洁而有趣的不等式:

推论 3 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$\frac{PA}{a} + \frac{PB}{b} + \frac{PC}{c} \geq \frac{a + b + c}{PA + PB + PC}. \tag{16}$$

特别地,在(16)式中令 P 为 $\triangle ABC$ 可得

推论 4 在 $\triangle ABC$ 中有

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{9(a + b + c)}{4(m_a + m_b + m_c)}. \tag{17}$$

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geqslant 4 \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}. \quad (18)$$

早为宋庆^[6]提出,后被褚小光与尹华焱用较繁的方法证明了.

考虑不等式(16)的推广,经用计算机验证,我们提出

猜想 1 设 $1 < k \leqslant 20$, 则对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$\frac{PA^k}{a^k} + \frac{PB^k}{b^k} + \frac{PC^k}{c^k} \geqslant 3^{1-k} \cdot \frac{a^k + b^k + c^k}{PA^k + PB^k + PC^k}. \quad (19)$$

本文对不等式(13)的证明用的是“差分代换法”(见[7]),近年来人们意识到这种简明的方法在证明多元多项式不等式时很有效.杨路教授的文献[7]就得到了国家重点基础研究发展规划项目(2004CB3180003)及国家自然科学基金项目(NNSFC-10471044)的资助.用差分代换法来证有关三角形边长的高次半对称不等式(先化为代数不等式)是十分简便的(仅是计算量较大).例如,用这种方法我们还可证明将(11)中的内角平分线换成相应的类似中线 k_a, k_b, k_c 成立,即证得不等式:

$$k_b^2 + k_c^2 \leqslant \frac{2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)}{(b+c)^2} \quad (20)$$

(上式化为边长的 12 次方不等式,用其它方法来证是十分困难的)据此与引理 1 可得类似于定理的不等式:

$$\frac{PA}{\sqrt{k_b^2 + k_c^2}} + \frac{PB}{\sqrt{k_c^2 + k_a^2}} + \frac{PC}{\sqrt{k_a^2 + k_b^2}} \geqslant \sqrt{2}. \quad (21)$$

最后,我们提出类似的一个有关三角形中线与高线 h_a, h_b, h_c 的动点型不等式猜想来结束本文.

猜想 2 对 $\triangle ABC$ 与任意一点 P 有

$$\frac{PA}{\sqrt{m_a(h_b + h_c)}} + \frac{PB}{\sqrt{m_b(h_c + h_a)}} + \frac{PC}{\sqrt{m_c(h_a + h_b)}} \geqslant \sqrt{2}. \quad (22)$$

参考文献:

- [1] 刘健. 100 个待解决的三角形不等式问题[A]. 见《几何不等式在中国》[C](单尊主编), 南京:江苏教育出版社, 1996.
- [2] 刘健. 关于锐角三角形的一个几何不等式[J]. 华东交通大学学报, 2000, 17(1): 75-78.
- [3] 刘健. Janous 不等式的一个等价式的推广[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(2): 131-134.
- [4] D. Mitrinovic, J. E. Pecaric and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities[M], Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [5] 褚小光. 关于三角形一动点的若干不等式[J]. 滨洲师专学报, 2001, 17(2): 34-39.
- [6] 宋庆. Euler 不等式的推广[A]. 见《几何不等式在中国》[C]. (单尊主编), 南京:江苏出版社, 1996. 131-136.
- [7] 杨路. 差分代换与不等式机器证明[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2006, 5(2): 1-7

An Improvement of the Geometric Inequality

LIU Jian

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Applying the the well-known geometric inequality and the method of difference substitution, and using Maple software to carry on the computation, the following geometric inequality is to established: For every triangle ABC and an arbitrary point P , we have $\sum \frac{PA}{w_b^2 + w_c^2} \geqslant \sqrt{2}$ (where w_a, w_b, w_c are the corresponding angle-bisectors of $\triangle ABC$), and several corollaries are given. Two two conjectures are proposed and verified by the computer.

Key words: triangle; angle-bisector; point; difference substitution; inequality