文章编号:1005-0523(2007)05-0157-02

图 $S_m * S_n$ 的邻点可区别的边色数

刘 华[1,2],冶建华[1],马少仙[1],张忠辅[3]

(1. 西北民族大学计算机科学与信息工程学院,兰州 730030;2. 兰州大学数学与统计学院,兰州 730000;
3. 兰州交通大学应用数学研究所,兰州 730000)

摘要:对一个正常边染色满足相邻点的色集不同,称为邻点可区别的边染色,其所用最少染色数称为邻点可区别的边色数.定义图 $S_m * S_n$ 为 $V(S_m * S_n)=\{w;u_1,u_2,\cdots,u_m\}\cup\{v_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$,$E(S_m * S_n)=\{wu_i|i=1,2,\cdots,m\}\cup\{u_iv_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$.本文得到了 $S_m * S_n$ 的邻点可区别的边色数.

关 键 词:图 星 邻点可区别边色数
中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

1 引言

关于图的染色问题,是图论研究的主要内容之一,而且新概念新方法不断出现,是当前非常活跃的前沿学科问题.图的染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数.由计算机科学等引出的点可区别边染色问题[1-3],是一个十分困难的问题.[4]减弱了要求,提出了邻点可区别的边染色概念,得到了若干结果,并提出了有关猜想,但仍是非常困难的问题.[5]得到了皇冠图 $G_{n,m}$的邻点可区别边色数.

定义1[4,5]对图 G 的一个 k-边正常染色法[5] f,若满足 $\forall$ u,v$\in V(G)$且 $uv\in E(G)$,$u\neq v$,有 $C(u)\neq C(v)$,则称 f 为 G 的一个 k-邻点可区别的边染色法,简记作 k-AVDEC of G,称

$X'_{as}(G)=\min\{k-|k-\text{AVDEC of } G\}$

为 G 的邻点可区别边色数,其中

$C(u)=\{f(uw)|w\in E(G)\}$

猜想1 对 $|V(G)|\geq 3$ 的连通图 G,若 $G\neq G_5$(5-圈)

$X'_{as}(G)\leq\Delta(G)+2$

其中,$\Delta(G)$表示 G 的最大度数.

定义2 图 $S_m * S_n$ 满足条件:$V(S_m * S_n)=\{w;u_1,u_2,\cdots,u_m\}\cup\{v_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$,$E(S_m * S_n)=\{wu_i|i=1,2,\cdots,m\}\cup\{u_iv_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$.

本文得到了 $S_m * S_n$ 的邻点可区别的边色数,文中未加述及的术语、记号可参见[6-8].

2 主要结果

引理1[4] 对 $|V(G)|\geq 3$ 的连通图 G,若有最大度点相邻,则有

$X'_{as}(G)\geq\Delta(G)+1$;

定理1 对 $m=1$,$n=1$ 有

$X'_{as}(S_1 * S_2)=2$

证明 按定义2,$S_1 * S_1=P_3$,易证结论成立.

定理2 对 $S_m * S_n$,有

$$X'_{as}(S_m * S_n)=\begin{cases} m, & m>n+1\geq 2;\\ n+1, & n+1>m\geq 2;\\ n+2, & m=n+1\geq 2.\end{cases}$$

证明 当 $m>n+1\geq 2$ 时,显然有 $X'_{as}(S_m * S_n)\geq m$,下证 $X'_{as}(S_m * S_n)\leq m$,为此仅需给出 $S_m * S_n$ 的一个 m-AVDEC 法即可.

令 f 为:

$f(wu_i)=i$, $i=1,2,\cdots,m$;
$f(u_1v_{1j})=j+1$, $j=1,2,\cdots,n$;
$f(u_2v_{21})=1$;
$f(u_2v_{2j})=j+1$, $j=2,3,\cdots,n$;
$f(u_3v_{31})=1$;$f(u_3v_{32})=2$;
$f(u_3v_{3j})=j+1$, $j=3,4,\cdots,n$;

收稿日期:2007-06-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(40301037);国家民委科研项目(05XB07)
作者简介:刘华(1977-),男,回族,甘肃平凉人,西北民族大学计算机科学与信息工程学院,讲师,主要从事应用数学的研究.

……

$f(u_{n+1}v_{(n+1)j})=j$, $j=1,2,\cdots,n-1$;

$f(u_{n+1}v_{(n+1)n})=n+2$;

$f(u_iv_{ij})=j$, $i=n+2,n+3,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$.

对此f,有

$|C(w)|=m$;

$|C(u_i)|=n+1$; $i=1,2,\cdots,m$;

$|C(u_{ij})|=1$; $i=1,2,\cdots,m$ $j=1,2,\cdots,n$.

所以,f是S_m*S_n的m－AVDEC法,从而此时定理为真.

当$n+1>m\geqslant 2$时,同于$m>n+1\geqslant 2$知,仅需给出S_m*S_n的$(n+1)$－AVDEC即可.

令f为

$f(wu_i)=i$, $i=1,2,\cdots,m$;

$f(u_1v_{1j})=j+1$, $j=1,2,\cdots,n$;

$f(u_2v_{21})=1$;

$f(u_2v_{2j})=j+1$, $j=2,3\cdots,n$;

$f(u_3v_{31})=1$; $f(u_3v_{32})=2$;

$f(u_3v_{3j})=j+1$, $j=3,4,\cdots,n$;

……

$f(u_mv_{mj})=j$, $j=2,3\cdots,m-1$

$f(u_mv_{mj})=j+1$, $j=m,m+1,\cdots,n$.

同于$m>n+1\geqslant 2$知,f是S_m*S_n的$(n+1)$－AVDEC法,此时结论为真.

当$m=n+1\geqslant 2$时,由定理1知,$X'_{as}(S_{n+1}*S_n)\geqslant n+2$,下证$X'_{as}(S_{n+1}*S_n)\leqslant n+2$,为此仅需给出$S_{n+1}*S_n$的$(n+2)$－AVDEC法

令f为:

$f(wu_i)=i$, $i=1,2,\cdots,n+1$;

$f(u_1v_{1j})=j+2$, $j=1,2,\cdots,n$;

$f(u_2v_{21})=1$;

$f(u_2v_{2j})=j+2$, $j=2,3,\cdots,n$;

$f(u_3v_{31})=1$;

$f(u_3v_{32})=2$;

$f(u_3v_{3j})=j+2$, $j=2,3,\cdots,n$;

……

$f(u_{n+1}v_{(n+1)j})=j$, $j=2,3,\cdots,n-1$;

$f(u_{n+1}v_{(n+1)n})=n+2$.

若记$\bar{C}(u)=\{1,2,\cdots,n+2\}/C(u)$,则$\bar{C}(w)=\{n+2\}$,而$n+2\in C(u_i)$,$i=1,2,\cdots,n+1$,再由$|C(v_{ij})|=1$,$|C(u_i)|\geqslant 2$

知,f是S_m*S_n的$(n+2)$－AVDEC法,从而此时结论为真.

综合以上各种情况,知定理2成立.

参考文献:

[1] Burris A C, Schelp R H. Vertex－distinguishing proper edge－colorings[J]. J of Graph Theory, 1997, 26: 73～82.

[2] Bazgan C, Harkat－Benhamdine A, et al. On the vertex－distinguishing proper edge－coloring of graphs[J]. J. Combin. Theory Ser. 1999, B 75, 288～301.

[3] Balister P N, Bollobás B, Shelp R H. Vertex distinguishing colorings of graphs with Δ(G)＝2[J]. Discrete Mathematics. 2002, (252): 17～29.

[4] Zhang Zhong－fu, Liu Ling－zhong, Wang Jian－fang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, (15): 623～626.

[5] 马刚,马明,张忠辅. 皇冠图Gn,m的邻点可区别边色数[J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(2): 141～143.

[6] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application[M]. New York: The Macmillan press Ltd, 1976.

[7] Yop H P. Total colorings of graphs [M]. New York: Springer－Verlag, 1996.

[8] 田丰,马仲番. 图与网络流理论[M]. 北京:科学出版社, 1987.

Adjacent Vertex－Distinguishing Edges Coloring of (S_m*S_n)

LIU Hua[1,2], YE Jian-hua[1], MA Shao-xian[1], ZHANG Zhong-fu[3]

(1. school of Computer Science and Information Engineering; Northwest University for Nationalities, Lanzhou, 730030;
2. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000;
3. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiao Tong University, Lanzhou, 730070, China)

Abstract: A proper edge coloring is called adjacent vertex－distinguishing edge coloring if colored sets from every two adjacent vertices incident edge are different. The minimum number of colors required for an adjacent vertex－distinguishing edge coloring, a simple graph G is denoted by $X'_{as}(G)$. The paper defines graph S_m*S_n as $V(S_m*S_n)=\{w;u_1,u_2,\cdots,u_m\}\cup\{v_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$, $E(S_m*S_n)=\{wu_i|i=1,2,\cdots,m\}\cup\{u_iv_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$. We get (S_m*S_n).

Key words: Graph, Star Coloring, Adjacent vertex－distinguishing edge coloring