

用置换法解有固定端的超静定小型刚架系统

喻晓今 胡淑兰 梁平英

(华东交通大学 土木建筑学院 江西南昌 330013)

摘要: 对多种梁挠曲线与悬臂梁挠曲线的关系研究作介绍, 给出了求解各梁位移的置换法位移方程, 包括转角方程和挠度方程。鉴于对刚架求解中稀有几类方法的情况, 运用所述的置换法, 把解梁问题的手段应用于刚架的解算, 给出了用置换法求解有固定端的超静定小型刚架系统的分析步骤, 具体求解过程所用的计算为代数方程的分式四则运算, 方法较通俗简便, 结果是解析解。提供了两例不同类型刚架的计算全程, 关键是由置换法位移方程表示出有关结点或转角或挠度的位移, 以此找到包含未知反力的关系式。

关键词: 置换法; 比拟; 位移; 刚架; 悬臂梁

中图分类号: TU328; TU323.5

文献标识码: A

计算小型刚架以前所见多为能量方法类, 文献[1~5]等已经提出了利用悬臂梁自由端的位移与荷载的关系, 移植为求解各种梁位移的方法, 即比拟方法或置换方法。将导出的置换法位移方程, 应用于刚架的求解过程。

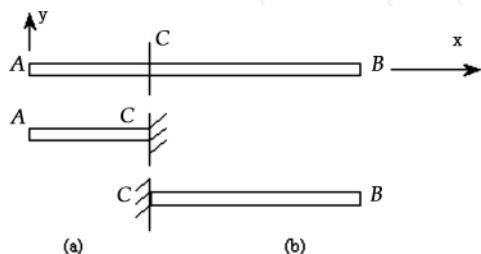


图1 任一段梁及其左置换梁、右置换梁

1 置换法简述

上述论文里考察了悬臂梁挠曲线与简支梁、外伸梁等挠曲线的关系, 其要点是将任何一段直梁的弹性曲线用悬臂梁的挠曲线比拟而得到, 推导出置换法求任意直梁的位移方程。在图1的情形下, (a)所示为左置换梁, (b)是右置换梁, 则可得以此两置换用之左右悬臂梁自由端挠度和杆长位置坐标为变

量的位移方程^[2~4]:

$$\theta = (w_l - w_r) / l \quad (1)$$

$$w = -(l-x)w_l/l - xw_r/l \quad (2)$$

其中 θ 是所求C截面的转角; w_l, w_r 分别表示左、右置换梁自由端挠度, 是原梁AB的荷载和反力等的函数, 位移方向与 w 轴一致者为正; l 为原梁AB长度; w 为C处挠度; x 为C处位置坐标。

将置换法应用于小型刚架求解的策划和步骤:

- (1) 刚架静力分析, 观察刚架构造、静定性;
- (2) 列写静力平衡方程;
- (3) 判定各构成段位置在加载过程中的位移, 包括自身变形以及随连接部分的刚体位移;
- (4) 在有固定端处截出一“悬臂梁”, 将其它连续部分刚化, 其上荷载静力等效简化至该“悬臂梁”的“自由端”处, 写出此“自由端”的位移;
- (5) 一段段地摘取直线段作为“简支梁”, 再按简支梁的置换法位移方程计算该段位移;
- (6) 依部分与整体的连续挠曲线关系, 尤其是角位移连续条件, 列写关系式;
- (7) 关系式与静力平衡方程联立求解, 得出各支反力, 即奠定解刚架的基础。

收稿日期: 2007-12-10

基金项目: 华东交通大学科研基金资助(06ZKTM05); 江西省道路与铁道工程重点实验室资助。

作者简介: 喻晓今(1959-), 男, 江西南昌人, 教授, 工学硕士, 从事各种结构、构(零)件的力学性能研究。

2 算例

2.1 门式刚架

例一: 文 [6] 给出的例题如图 2, 求此刚架反力、内力和 BC 中点位移. 已知: $AB = h = 4 \text{ m}$, $BC = 8 \text{ m}$, $CD = 4 \text{ m}$, $q = 3 \text{ kN/m}$, AB 、 CD 具有同样的线刚度 i , BC 线刚度 $2i$.

1) 受力分析 整体受力图见图 3.

略写单位(下同), 平衡方程有

$$X_A = -12 - X_D \quad (3)$$

$$Y_A = -Y_D \quad (4)$$

$$M_A = 24 - 8Y_D - M_D \quad (5)$$

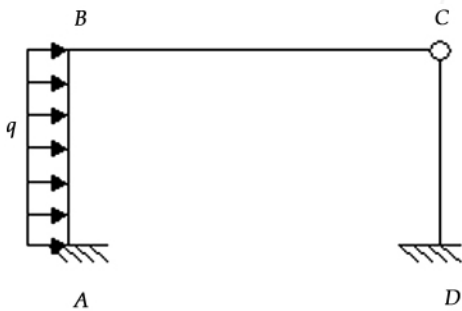


图 2 刚架 1

隔离 CD 得平衡方程

$$M_D = -4X_D \quad (6)$$

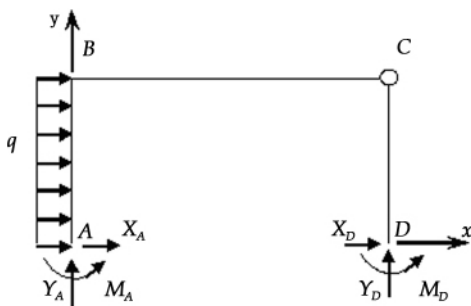


图 3 刚架 1 受力图

2) AB 段位移 截出 AB 其为一“悬臂梁”见图 4. 此段的 $EI = 4i$, $M_{YD} = Y_D \cdot l = 8Y_D$. 写出 B 处转角为

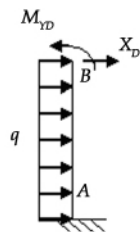


图 4 AB 段

$$\begin{aligned} \theta_{BA} &= \frac{3 \times 4^3}{6 \times 4i} - \frac{8Y_D \times 4}{4i} + \frac{X_D \times 4^2}{2 \times 4i} \\ &= \frac{8}{i} - \frac{8Y_D}{i} + \frac{2X_D}{i}, \text{正值顺钟.} \end{aligned}$$

x 向线位移为

$$\begin{aligned} \Delta_{XBA} &= \frac{3 \times 4^3}{8 \times 4i} - \frac{8Y_D \times 4^2}{2 \times 4i} + \frac{X_D \times 4^3}{3 \times 4i} \\ &= \frac{24}{i} - \frac{16Y_D}{i} + \frac{5.333X_D}{i} \end{aligned}$$

3) BC 段位移 截 BC 如图 5. 其中 $M_q = \frac{qh^2}{2} = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{XA} = X_A \cdot 4$. BC 段的 $E_1I_1 = 2i \times l = 16i$.



图 5 BC 段

以置换法解 B 处转角. 让 B 点成置换梁的固支端, 有

$$w_l = 0, \quad w_r = \frac{Y_D \cdot 8^3}{3 \times 16i} = 10.667 \frac{Y_D}{i}. \text{ 故由式(1) 有}$$

$$\theta_{BC} = \frac{0 - 10.67Y_D/i}{8} = -1.333 \frac{Y_D}{i}, \text{正值逆钟.}$$

4) CD 段位移 隔出 CD 如图 6 此段的 $EI = 4i$.

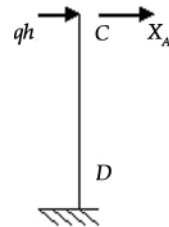


图 6 CD 段

C 处 x 向位移为

$$\begin{aligned} \Delta_{XCD} &= \frac{3 \times 4 \times 4^3}{3 \times 4i} + \frac{X_A \times 4^3}{3 \times 4i} \\ &= \frac{64}{i} + \frac{5.333X_A}{i} \end{aligned}$$

5) 变形谐调 依挠曲线连续性、并考虑正负号, 有 $\theta_{BA} = -\theta_{BC}$. 代入上式得

$$X_D = -4 + 4.667Y_D \quad (7)$$

同理, 在忽略很小的杆轴向拉压变形情况下(下同), 由 $\Delta_{XBA} = \Delta_{XCD}$, 有

$$-5.333X_A + 5.333X_D - 16Y_D = 40 \quad (8)$$

6) 联立方程求解 联立式(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)得

$$Y_D = 0.553 \text{ kN}, \quad X_D = -1.419 \text{ kN}$$

$$Y_A = -0.553 \text{ kN}, X_A = -10.581 \text{ kN}$$

$$M_D = 5.676 \text{ kNm}, M_A = 13.9 \text{ kNm}$$

往下即可解刚架内力等。

7) BC段中点位移 由忽略轴向变形知, B、C点y向高度相等(图5),该段中点x向位移即是

$$\Delta_{xBA} = \frac{7.584}{i}, \rightarrow. \text{再于该中点设置换梁的固支端,得}$$

$$w_l = -\frac{(-4.424) \times 4^2}{2 \times 16i} - \frac{0.553 \times 4^3}{3 \times 16i}$$

$$= \frac{1.475}{i}$$

$$w_r = -\frac{0.553 \times 4^3}{3 \times 16i} - \frac{0.737}{i}$$

由式(1)得中点转角

$$\theta = -\frac{(1.475/i) - (0.737/i)}{8} = \frac{0.092}{i}$$

由式(2)得中点竖向位移

$$w = -\frac{1.475}{i} + \frac{0.092}{i} \times 4 = \frac{-1.106}{i}, \downarrow$$

2.2 Γ型刚架

例二:文[7]有题见图7.求内力.

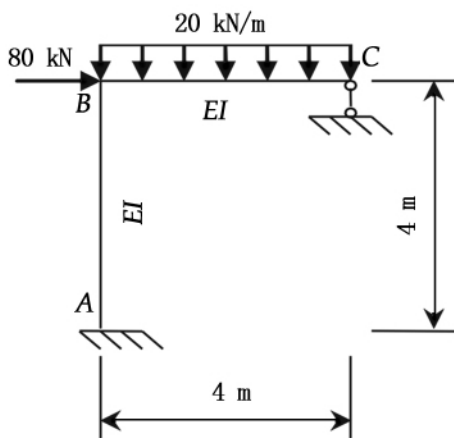


图7 刚架2

1) 受力分析 见图8.有

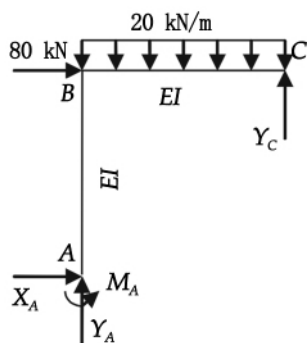


图8 整体受力

$$X_A = -80$$

$$Y_A + Y_C = 80$$

(9)

$$M_A + 4Y_C = 480$$

(10)

2) 分析AB段 见图9.

刚化BC,力向B点简化,得

$$F_q = 80 \text{ kN}, M_q = 160 \text{ kNm}, M_{YC} = 4Y_C$$

求悬臂梁AB在B点的转角

$$\theta_{BA} = -\frac{80 \times 4^2}{2EI} - \frac{M_q \times 4}{EI} + \frac{M_{YC} \times 4}{EI}$$

省写EI(下同),有

$$\theta_{BA} = -1280 + 16Y_C$$

(11)

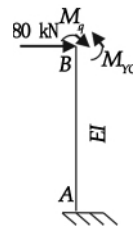


图9 AB段

3) 分析BC段 见图10.

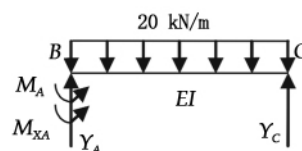


图10 BC段

刚化AB,力向B点简化,得

$$M_{xA} = 4X_A$$

在B处设置换梁固定端,有

$$w_l = 0, w_r = -640 + 21.333Y_C$$

由式(1)得B处转角

$$\theta_B = 160 - 5.333Y_C$$

(12)

4) 变形协调 因B处转角惟一,由式(11)、

(12)得

$$-1280 + 16Y_C = 160 - 5.333Y_C$$

$$Y_C = 67.501 \text{ kN}$$

5) 求反力 分别将Y_C代入式(9)、(10)得

$$Y_A = 12.499 \text{ kN}, M_A = 209.996 \text{ kNm}$$

求刚架内力的大门洞开.

3 结论

置换法是在记忆单个荷载下悬臂梁自由端位移的简单结果(一般6个整数常数)和置换梁2个位移方程的基础上,进行静力平衡方程和变形方程简单分式的四则运算,而求出多种荷载下小型刚架的反力、内力和位移.该方法原理简明,可得到刚架的解析解.鉴于文献[6~17]等等未见涉及此法,其可为传统方法的补充.

参考文献:

- [1] 喻晓今. 几种荷载下的梁绝对值最大挠度的同一性[J]. 华东交通大学学报 2000, 17(2): 40-45.
- [2] 喻晓今. 以比拟梁法求梁的位移[J]. 华东交通大学学报 2002, 19(4): 35-36, 40.
- [3] 喻晓今. 挠曲线复位的微分方程解法求梁的位移[J]. 华东地质学院学报 2003, 26(3): 271-273.
- [4] 喻晓今. 求梁位移的比拟梁法[J]. 东华理工学院学报, 2004, 27(4): 398-400.
- [5] 喻晓今. 求超静定等直梁的置换法[J]. 工程力学, 2007, 24(Sup. 1): 66-69.
- [6] 龙驭球, 包世华主编. 结构力学教程(Ⅰ)[M]. 北京: 高等教育出版社 2000.
- [7] 于仁才, 刘文顺. 结构力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
- [8] 范钦珊. 工程力学教程(Ⅰ)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [9] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学(Ⅰ)[M]. 北京: 高等教育出版社 2002.
- [10] 单辉祖. 材料力学(Ⅰ)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [11] 刘鸿文. 材料力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [12] [英]E. J. 赫恩, 孙立谔译. 材料力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [13] 刘玉彬, 白秉三等. 结构力学(下册)[M]. 北京: 科学出版社 2004.
- [14] James M. Gere. Mechanics of Materials [M]. 北京: 机械工业出版社 2003.
- [15] 黎绍敏. 结构力学[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1988.
- [16] 清华大学建筑工程系. 结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1974.
- [17] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.

Solution of Small Scale Statically Indeterminate Frame with Fixed End System by Conversion Method

YU Xiao-jin, HU Shu-lan, LIANG Ping-ying

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In the paper, the relationship between deflection curves of various kinds of beams and cantilever beam is introduced; the displacement equation of the conversion methods for resolving beams are given, including the equation of slope rotation angle and the equation of deflection. Owing to lack of geometric method for calculating frames, the conversion method used to calculate the beams is employed to resolve the frames now. It puts forward the analytic steps of the solution of small scale statically indeterminate frame with fixed end system by the conversion method. The concrete process of calculation belongs to primary computation of algebraic equation. Easy to understand, it gets analytic solution. It provides the calculation sequence of two examples of different types of frame. The most important is that the slope rotation angle or the deflection at concerning nodes is expressed by the conversion method so as to find the relations of the concerning reaction forces.

Key words: conversion method; analogy; displacement; frame; cantilever beam

(责任编辑: 王全金)