第 25 卷第 2 期　　华东交通大学学报　　Vol. 25　No. 2
2008 年 4 月　　Journal of East China Jiaotong University　　Apr. ,2008

文章编号:1005－0523(2008)02－0029－05

受路面激励引起车桥响应频谱的研究

余学文,包忠有

(华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要:用频谱分析的方法研究了车桥系统由路面不平顺引起的动力响应. 为定性地分析车桥系统提供了一个新的方法. 文中视车桥为两个子系统,用迭代法解出了它们的频谱响应,避免了以往所使用的数值积分分析法. 本文从分析车桥系统传递函数的频谱入手,研究了车桥系统的基频与车速的关系,并且分析了车桥的质量比、固有频率比、车速及阻尼对系统动力稳定性的影响,从而导出较为有利的行车速度.

关　键　词:频谱分析;频谱响应;车桥系统

中图分类号:TU312　　　　文献标识码:A

车桥系统是一个时变系统,车在桥上的位置不同、速度不同,车桥的动力响应亦不同. 车桥由桥面不平顺引起的频率响应应是随时间变化的. 对于车辆的这种移动荷载作用在桥上的问题,以往多是在时域内将其振动微分方程进行数值积分求解. 时域内的逐步积分法对定量地分析车桥系统是比较有效的,然而定性地分析则比较困难. 以往的车桥响应的频谱分析是通过 FFT 把积分结果变换到频域内,这样获得的频谱响应受到以下因素的影响:

(1) 作为激励源输入的路面平顺随机过程的数值模拟是否能真实地反映路面的不平顺情况;

(2) 任何给定的初始条件都必然会影响数值积分的结果,变换后的频谱响应同样要受初始条件的影响;

(3) 车桥系统是一个时变系统,而变换后的频谱响应只是一段时间内的平均响应,不是瞬时响应,并且数值积分还涉及到积分的稳定性与收敛性等问题.

本文用迭代法在频域内直接导出车桥的响应谱和传递谱,它的表达式中包含一个矩阵级数项和一个初始项,如果系统是动力稳定的,则车桥不会发生共振失稳现象,该矩阵级数一定是收敛的. 通过对矩阵级数收敛性的分析,可以定性地研究车桥系统动力特性与行车速度、车桥响应的频率以及传递函数的频率谱以后分别简称为响应和传递谱.

1　车桥系统的动力分析

为导出车桥系统的振动方程,首先假设:

(1) 车轮与桥面始终接触,车轮的质量可以忽略不计;

(2) 车辆重力的作用可视为一个移动的力,这里只讨论由路面不平顺引起的振动,车辆重力的影响则不予考虑;

(3) 在上一次迭代中得出的近似响应谱,在下一次迭代过程中被看作是不随时间变化的;

(4) 简支梁的动位移假设为

收稿日期:2007－11－25

作者简介:余学文(1964－),男,江西星子人,华东交通大学高级讲师.

$$z(x,t)=\sum_{n=1}^{k}q_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

式中 L 为桥的跨度.

则车桥系统的振动方程分别为

$$My''+Cy'+ky=C\zeta'+K\zeta+c\frac{\partial z}{\partial t}+cz \quad x=vt \tag{2}$$

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+c\frac{\partial z}{\partial t}+EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=\delta(x-vt)\left(Cy'+ky-C\zeta'-k\zeta-C\frac{\partial z}{\partial t}-kz\right) \tag{3}$$

式中 y——车的动位移

M——车的质量

C——车的阻尼系数

k——车的弹簧刚度系数

v——车速

ζ——路面不平顺的随机过程

c——桥单位长度的质量

EI——桥的抗弯刚度

$\delta(x-vt)$——Dirac Dalta 函数,定义为

$$\begin{cases}\delta(x-vt)=0 & x\neq vt \qquad 0<X<L\\ \int_0^L\delta(x-vt)\,dx=1 & \text{且} \int_0^L\delta(x-vt)f(x)\,dx=f(vt) \qquad 0<vt<L\end{cases}$$

车桥动位移及路面一平顺的随机过程有如下形式

$$\begin{cases}y=\int_{-\infty}^{\infty}Y(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\\ q_n=\int_{-\infty}^{\infty}Q(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\\ \zeta=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\end{cases} \tag{4}$$

其中 $Y(w)$、$Q(w)$ 可以是随时间变化的谱函数,w 为角频率.

由于 y',$\frac{\partial z}{\partial t}$的响应谱也随时间变化,不能从 y,z 的频率直接导出,需作为独立的项直接参加迭代. 设振动方程的形式为

$$y''+z\eta\omega_v+y'+\omega_v^2y=f \tag{5}$$

可改写为

$$\begin{bmatrix}z\eta\omega_v & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y'\\ y''\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_v^2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y\\ y'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f\\ \theta\end{Bmatrix} \tag{6}$$

令

$$\begin{Bmatrix}y\\ y'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ d & d^*\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix} \tag{7}$$

则可将式(6)解耦为

$$\begin{cases}ay'_1+by_1=f\\ a^*y'_2+b^*y_2=f\end{cases} \tag{8}$$

式中 $a=2i\omega_v\sqrt{1-\eta^2}$、$b=2i\omega_v^2(1-\eta^2+i\eta\sqrt{1-\eta^2})$、$d=\omega_v(-\eta+i\sqrt{1-\eta^2})$、$i=\sqrt{-1}$,$a^*$、$b^*$、$d^*$ 分别为 a、b、d 的共轭算数.

在第一次求车桥的近似响应谱时,忽略式(2)、(3)右边项中桥梁振动的影响,通过解耦换和关系式(4),得到车辆的第一次近似响应谱

$$\{Y(\omega)\}^{(1)}=\{E\}\zeta(\omega) \tag{9}$$

其中$\{E\}$的元素为

$$e_1 = \frac{w_v^2 - 2i\eta w_v w}{b - iwa} \qquad e_2 = \frac{\omega_v^2 - 2i\omega_v\omega}{b - i\omega a^*} \qquad \omega_v^2 = \frac{k}{M} \qquad 2\eta\omega_v = \frac{C}{M}$$

式(3)中忽略右边中桥振动影响,代入车的第一次近似响应,乘以 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 并在 $0\sim L$ 之间对 x 积分,然后对式(7)进行变换,得到桥梁的第一次近似响应谱

$$\{Q(\omega)\}^{(2)} = [T]\{Y(\omega)\}^{(1)} - \{F\}\zeta(\omega) \tag{10}$$

矩阵$[T]$中的元素为

$$t_{n1,1} = 2\beta(A_{n1}\sin\omega_{nv}t + B_{n1}\cos\omega_{nv}t)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d)$$
$$t_{n1,2} = 2\beta(A_{n1}\sin\omega_{nv}t + B_{n1}\cos\omega_{nv}t)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d^*)$$
$$t_{n2,1} = 2\beta(A_{n2}\sin\omega_{nv}t + B_{n2}\cos\omega_{nv}t)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d)$$
$$t_{n2,2} = 2\beta(A_{n2}\sin\omega_{nv}t + B_{n2}\cos\omega_{nv}t)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d^*)$$

其中

$$A_{n1} = \frac{b_n - i\omega a_n}{(b_n - i\omega a_n) + \omega_{nv}^2 a_n^2} \qquad A_{n2} = \frac{b_n^* - i\omega a_n^*}{(b_n^* - i\omega a_n^*) + \omega_{nv}^2 a_n^{*2}}$$

$$B_{n1} = \frac{-i\omega_{nv}a_n}{(b_n - i\omega a_n) + \omega_{nv}^2 a_n^2} \qquad B_{n2} = \frac{-i\omega_{nv}a_n^*}{(b_n^* - i\omega a_n^*) + \omega_{nv}^2 a_n^{*2}}$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{m}\cdot\frac{\pi n}{L} \qquad 2\eta\omega_v = \frac{c}{m} \qquad \beta = \frac{M}{ml} \qquad \omega_{nv} = \frac{n\pi v}{L}$$

a_n、b_n 与前面的 a、b 定义相同

$$f_{n1} = 2\beta(A_{n1}\sin\omega_{nv}t + B_{n1}\cos\omega_{nv}t)(\omega_n^2 - 2i\eta\omega_v\omega)$$
$$f_{n2} = 2\beta(A_{n2}\sin\omega_{nv}t + B_{n2}\cos\omega_{nv}t)(\omega_n^2 - 2i\eta\omega_v\omega)$$

将桥梁响应的第一次近似解代入车的振动方程,得到车响应谱的第二次近似

$$\{Y(\omega)\}^{(2)} = [S](Q(\omega)\}^{(1)} + \{E\}\zeta(\omega) \tag{11}$$

矩阵$[S]$中的元素为

$$S_{1,n1} = (A_1\sin\omega_{nv}t + B_1\cos\omega_{nv}t)(\omega_n^2 + 2\eta\omega_v d_n)$$
$$S_{1,n2} = (A_1\sin\omega_{nv}t + B_1\cos\omega_{nv}t)(\omega_n^2 + 2\eta\omega_v d_n^*)$$
$$S_{2,n1} = (A_2\sin\omega_{nv}t + B_2\cos\omega_{nv}t)(\omega_n^2 + 2\eta\omega_v d_n)$$
$$S_{2,n2} = (A_2\sin\omega_{nv}t + B_2\cos\omega_{nv}t)(\omega_n^2 + 2\eta\omega_v d_n^*)$$

$$A_1 = \frac{b - i\omega a}{(b - i\omega a) + \omega_{nv}^2 a^2} \qquad A_2 = \frac{b^* - i\omega a^*}{(b^* - i\omega a^*) + \omega_{nv}^2 a^{*2}}$$

$$B_1 = \frac{-i\omega_{nv}a}{(b - i\omega a) + \omega_{nv}^2 a^2} \qquad B_2 = \frac{-i\omega_{nv}a^*}{(b - i\omega a^*) + \omega_{nv}^2 a^{*2}}$$

将车辆的近似响应和桥的近似响应代入式(3)的右边,可得桥梁的第二次近似响应谱

$$\{Q(\omega)\}^{(2)} = [T](Y(\omega)\}^{(2)} - \{F\}\zeta(\omega) - [R]\{Q(\omega)\} \tag{12}$$

式中矩阵$[R]$的元素为

$$r_{n1,m1} = 2\beta(A_{n1,m}SS + B_{n1,m}SC + C_{n1,m}CS + D_{n1,m}CC)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d_m)$$
$$r_{n1,m2} = 2\beta(A_{n1,m}SS + B_{n1,m}SC + C_{n1,m}CS + D_{n1,m}CC)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d_m^*)$$
$$r_{n2,m1} = 2\beta(A_{n2,m}SS + B_{n2,m}SC + C_{n2,m}CS + D_{n2,m}CC)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d_m)$$
$$r_{n2,m2} = 2\beta(A_{n2,m}SS + B_{n2,m}SC + C_{n2,m} + D_{n2,m}CC)(\omega_v^2 + 2\eta\omega_v d_m^*)$$

其中

$$SS = \sin\omega_{nv}t\sin\omega_{mv}t \qquad SC = \sin\omega_{mv}t\cos\omega_{mv}t$$
$$CS = \cos\omega_{nv}t\sin\omega_{mv}t \qquad CC = \cos\omega_{mv}t\cos\omega_{mv}t$$

$$A_{n1,m} = \frac{k(k^2 + k_n^2 + k_m^2)}{(k^2 + k_n^2 + k_m^2)^2 - 4k_n^2k_m^2} \qquad B_{n1,m} = \frac{-k_m(k^2 - k_n^2 + k_m^2)}{(k^2 + k_n^2 + k_m^2)^2 - 4k_n^2k_m^2}$$

$$C_{n1,m}=\frac{-k_n(k^2+k_n^2-k_m^2)}{(k^2+k_n^2+k_2^2)^2-4k_n^2k_m^2}\qquad D_{n1,m}=\frac{2kk_nk_m}{(k^2+k_n^2+k_m^2)^2-4k_n^2k_m^2}$$

$k=b_n-i\omega a_n$ $k_n=\omega_{mv}a$ $k_m=\omega_{nv}a_n$ 系数 $A_{n2,m}$、$B_{n2,m}$、$C_{n2,m}$、$D_{n2,m}$ 与 $A_{n1,m}$、$B_{n1,m}$、$C_{n2,m}$、$D_{n2,m}$ 相似，只需要把其中的 a_n、b_n、d_n 相应换成 a_n^*、b_n^*、d_n^*、即可.

综合式(9)、(10)、(11)、(12)可递推式

$\{Y(\omega)\}^{(3)}=[S](Q(\omega)\}^{(2)}+\{E\}\zeta(\omega)$，$\{Q(\omega)\}^{(3)}=[T](Y(\omega)\}^{(2)}-\{F\}\zeta(\omega)-[R]\{Q(\omega)\}^{(2)}$

……

则响应谱的最终表达式为

$$\{Q(\omega)\}=\sum_{j=0}^{\infty}=([T][S]-[R])^j([T]\{E\}-\{F\}\zeta(\omega) \tag{13}$$

$$\{Y(\omega)\}=\{E\}\zeta(\omega)+[S]\{Q(\omega)\} \tag{14}$$

车的响应谱为

$$\begin{cases}Y(\omega)=Y_1(\omega)+Y_2(\omega)\\ Y'(\omega)=dY_1(\omega)+d^*Y_2(\omega)\end{cases} \tag{15}$$

桥梁在 x 点处的响应谱为

$$\begin{cases}z(x_1\omega)=\sum_{n=1}^{k}\sin\frac{n\pi x}{L}[Q_{n1}(\omega)+Q_{n2}(\omega)]\\ z'(x_1\omega)=\sum_{n=1}^{k}\sin\frac{n\pi x}{L}[dQ_{n1}(\omega)+d_n^*Q_{n2}(\omega)]\end{cases} \tag{16}$$

桥梁各阶模态的传递谱为

$$\{H(\omega)\}=\sum_{j=0}^{\infty}([T][S]-[R])^j([T]\{E\}-\{F\}) \tag{17}$$

在 x 点处的传递谱为

$$H_x(x_1\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}[H_{n1}(\omega)H_{n2}(\omega)] \tag{18}$$

从上面的式子可知，车、桥的响应谱和传递谱均包含一个矩阵级数，在系统动力稳定的条件下，此级数是一定收敛的，并且矩阵 $[T][S]-[R]$ 的最大特征值的模应小于 1. 从而揭示出车桥系统动力稳定的特征与规律.

2 算例及分析

2.1 系统的基频与车速的关系

为了定性地分析由路面不平顺引起的车桥响应特性，计算中采用了无量纲参数. 当车在跨中的瞬间，桥梁跨中和 $X/L=0.2$ 处的传递谱幅值 $|Hz|^2$. 频率比 $\omega_1/\omega_V=3$，质量比 $ml/M=20$，阻尼比 $\eta_1=0.02$，$\eta=0.1$，速度参数 α 分别取 0.2，0.4，0.6，0.8，1.0 等值. 速度参数定义为 $\alpha=\pi v/\omega_1 l$，由于车速不同，桥梁的传递谱发生了变化，在各固有频率处出现两个峰值，而且两峰值的距离随着车速的增加而增大. 各对峰值所在的位置约为

$$\omega_{n1}=\omega_n-\omega_{nv}$$
$$\omega_{n2}=\omega_n+\omega_{nv}\qquad(n=1,2,\cdots\cdots)$$

在车辆的作用下，系统振动的基频呈下降趋势，系统的最低频率应为 $\omega_{11}=\omega-\pi v/l$，$(\alpha<1)$

2.2 车的瞬时位置对响应特性的影响

研究车在不同位置时桥跨中和 0.2 跨处的传递谱幅值. 虽然车的瞬时位置对桥梁的响应有一定的影响，但传递谱的峰值位置基本不变，且幅值亦变化不大. 由于桥梁的响应基本上取决于前几个峰值，所以车的瞬时位置对桥梁的动力特征影响不大. 以上均取速度参数 $\alpha=0.4$.

2.3 各参数对系统动力稳定性的影响

计算分析表明，在速度参数 $\alpha<1$ 的情况下，传递谱的第一对峰值对响应的影响最大，而且级数的收敛

速度在第一个峰值处 $\omega_{11}=\omega_1-\omega_{1V}$ 较慢. 在第一个峰值处级数的收敛性受速度参数的影响很大.

当桥与车的质量比 ml/M 大于 10^2 时,则级数一定是收敛的. 算例中,取桥的阻尼比 $\eta_1=0.01$, $\eta=0.1$. 结果可知,当速度参数 $\alpha=1/2$ 时,其临界质量比均取较小值. 所以该速度对系统的动力稳定性较有利. 而且它只取决于桥梁的固有特性. 但该峰值受车辆阻尼比的影响较大,当车的阻尼比下降时,临界质量比在这些峰值处明显上升. 所以它们是由车的自振特性引起的,其位置取决于车桥的固有频率比,由此可知,结构的阻尼比 η_1 对系统的总体稳定性影响很大. 当结构的阻尼比下降时,临界质量比总体上升. 两者大致成反比关系. 因而,车轿系统的动力稳定性受到阻尼比、车速、固有频率比和质量比这几个因素的影响.

3　结论

提出了在频域内研究车桥系统动力特性的新方法,通过对一个单自由度的车和一个简支梁的分析可得以下结论:

(1) 车桥系统的基频随车速的增加而下降;

(2) 车在桥上的瞬时位置对桥梁的响应特性影响不大;

(3) 当车速 $v_b=\omega_1 L/2\pi$ 时,系统的动力稳定性好;

(4) 当车速 $v_b=\dfrac{\omega_1 L}{2\pi}\left(1\pm\dfrac{\omega_v}{\omega_1}\right)$ 时,系统的稳定性较差;

(5) 临界质量比受结构阻尼的影响较大,两者大致成反比关系.

在路面不平顺的频谱已知时,用上述方法能很快地得出不同情况下车桥的响应谱及响应方差. 本方法也可用于分析复杂的车桥模型.

参考文献:

[1] G. hutchinson, AL – hussaini. "Interaction of Load Speed an Mass on the Dynamic Response of Damped Beams [J]. IABSE Proceedings, 1986, (5): 86 – 97.

[2] TOR DAHL BERG. Vehicle – Bridge Interaction [J]. Vehcile System Dynamics, 1984, 187 – 206.

[3] 曹雪琴. 列车通过桥梁结构竖向振动分析 [J]. 上海铁道学报, 1981, (3): 26 – 29.

[4] 曹雪琴. 列车通过桁梁桥横向振动随机分析 [J]. 上海铁道学报, 1987, (5): 125 – 128.

Response Spectra of Vehicle – bridge System Stimulated by Road Surface

YU Xue – wen, BAO Zhong – you

(School of Civil Engineering and Architecture., East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A new method for the dynamic study of vehicle – bridge system has been presented here. The transferred spectra of the system's interaction due to roughness of road surface are studied by iterative method in frequency domain. The bridge and vehicle are treated as two subsystems and their equations of motion are solved alternately to derive the approximate response spectra. In this paper the lowest frequency of the system and its dynamic stability are investigated by spectral analysis. The advantageous vehicle speeds have been obtained as a result.

Key words: spectra analyses; spectra response; vehicle – bridge system

(责任编辑: 王建华)