第 25 卷第 2 期 华 东 交 通 大 学 学 报 Vol. 25 No. 2
2008 年 4 月 Journal of East China Jiaotong University Apr. ,2008

文章编号:1005 - 0523(2008)02 - 0056 - 03

图的符号树控制数

徐保根,赵金凤,赵 华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:引入了图的符号树控制的概念,给出一个连通图 G 的符号树控制数 $\gamma'_T(G)$ 的一个上界和一个下界,说明了这两个界限均是最好可能的,并确定几类特殊图的符号树控制数,这包括了圈、轮图、完全图和完全二部图.

关 键 词:符号树控制函数;符号树控制数;圈;轮图;完全图;完全二部图

中图分类号:O157.5 文献标识码:A

文章所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1].

近些年来,图的控制理论的研究内容越来越丰富.加拿大著名图论专家 E. J. Cockayne[2] 等人先后引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式.1998 年美国图论学者 W. T. Haynes 等人出版了两部专著[3-4],较为系统地综述了近期的一些主要研究成果.然而值得注意的是:几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言,很少涉及图的边控制问题.为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容,我们已将图的点控制概念转向研究图的边控制问题,并获得了初步的研究成果,如符号边控制[5-6]、符号星控制[6-7]、符号圈控制[8]等.为此,我们将引入图的符号树控制概念.

设 $G=(V,E)$ 为一个连通图,若 G 的一个支撑子图 T 为一棵树,即 $V(G)=V(T)$,则称 T 为图 G 的一棵生成树.

定义 1 设 G 是一个 n 阶连通图($n\geq 2$),一个函数 $f: E\to\{+1,-1\}$ 如果满足:$\sum_{e\in E(T)} f(e)\geq 1$ 对 G 中每一棵生成树 T 成立,则称 f 为图 G 的一个符号树控制函数.图 G 的符号树控制数定义为 $\gamma'_T(G)=\min\{\sum_{e\in E(T)} f(e)\mid f$ 为 G 的符号树控制函数$\}$.

定义空图的符号树控制数 $\gamma'_T(\overline{K}_n)=0$.且规定:对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2,$\gamma'_T(G_1\cup G_2)=\gamma'_T(G_1)+\gamma'_T(G_2)$.

由上述定义不难看出有下面的性质:

(1) 对于任意一个图 G,均有

$$\gamma'_T(G)\equiv |E(G)|\pmod 2$$

(2) 对于任意一棵 n 阶树 $T(n\geq 2)$,均有

$$\gamma'_T(T)=(3-(-1)^n)/2$$

本文主要引入了图的符号树控制概念,给出图 G 符号树控制数 $\gamma'_T(G)$ 的若干界限,并确定了圈、轮图、完全图、完全二部图的符号树控制数.

1 符号树控制数的界限

定理 1 设 G 为一个 n 阶连通图,$|E(G)|=m$ 且 $\delta(G)\geq 1$,则

$$\gamma'_T(G)\geq 2\lceil n/2\rceil - m$$

且此下界是最好可能的.

证明 设 f 为图 G 的一个符号树控制函数,且使得 $\gamma'_T(G)=\sum_{e\in E(T)} f(e)$ 成立.记 $A=\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}$,$B=\{e\in E(G)\mid f(e)=-1\}$,$|A|=s$,$|B|=t=m-s$.显然有

$$\gamma'_P(G)=|A|-|B|=s-t=2s-m.$$

对于 G 的任一生成树 T,由定义知 $\sum_{e\in E(T)} f(e)\geq 1$,

收稿日期:2008 - 03 - 10

基金项目:国家自然科学基金项目(10661007);江西省自然科学基金项目(2007GZS0715)

作者简介:徐保根(1963 -),男,江西南昌人,教授.

注意到 $|E(T)|=n-1$,故 $|E(T)\cap B|\leq\frac{n}{2}-1$,从而 $s=|A|\geq|E(T)\cap A|\geq(n-1)-(n/2-1)=n/2$,即有 $\gamma'_P(G)=2s-m\geq n-m$. 由性质(1)得 $\gamma'_T(G)\geq 2\lceil n/2\rceil-m$.

为了看出此下界是最好可能的,下面构造一个 n 阶图 G,使上式等号成立.

令 $r=\lfloor n/2\rfloor$,图 G 为完全图 K_r 中任意增加 $q=\lceil n/2\rceil$ 条悬挂边所得的图,如图 1 所示.

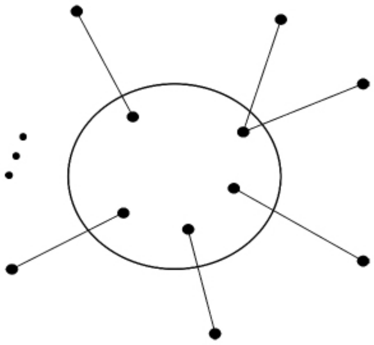

图 1

明显地,$|V(G)|=r+q=n$,$|E(G)|=(r/2)+q=m$. 一方面,由上述知 $\gamma'_T(G)\geq 2\lceil n/2\rceil-m$.

另一方面,可定义 G 的一个函数 f 如下:

$$f(e)=\begin{cases}-1 & \text{当 } e\in E(K_r)\text{ 时}\\ +1 & \text{否则}\end{cases}$$

对于 G 的任一生成树 T,K_r 中必有 $r-1$ 条边在 T 中,且 T 包含了 G 的所有悬挂边,故有 $\sum_{e\in E(T)}f(e)=q-(r-1)\geq1$,因此 f 为图 G 的一个符号树控制函数,从而有 $\gamma'_T(G)\leq\sum_{e\in E(T)}f(e)=q-\binom{r}{2}=(n-r)-(m-q)=n+\lceil n/2\rceil-\lfloor n/2\rfloor-m=2\lceil n/2\rceil-m$,结合上式得 $\gamma'_T(G)=2\lceil n/2\rceil-m$,至此定理证毕.

定理 2 设 $G(V,E)$ 为一个 n 阶连通图($n\geq2$),$m=|E(G)|$,$S(G)$ 表示 G 中 $\lfloor n/2\rfloor$ 阶子图的最多边数,则 $\gamma'_T(G)\leq m-2S(G)$.

证明 令 H 为图 G 中边数最多的一个中 $\lfloor n/2\rfloor$ 阶子图,即有 $|E(H)|=S(G)$,$|V(H)|=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

定义图 G 的一个函数 f 如下:

$$f(e)=\begin{cases}-1 & \text{当 } e\in E(H)\text{ 时}\\ +1 & \text{否则;}\end{cases}$$

不难验证: f 为图 G 的一个符号树控制函数,故 $\gamma'_T(G)\leq\sum_{e\in E}f(e)=m-2S(G)$,证毕.

2 特殊图的符号树控制数

性质(2)给出树的符号树控制数,下面考虑其它一些特殊图,如圈、完全图、轮图、完全二部图的符号树控制数.

定理 3 当 $n\geq3$ 且为整数时,则有

$$\gamma'_T(C_n)=(5-(-1)^n)/2.$$

证明 在 C_n 上任取 $t=\lceil n/2\rceil+1$ 条边,构成集合 $A=\{e_1,e_2,\cdots,e_t\}$,记 $B=V(C_n)\setminus A$,则 $|B|=n-\lceil n/2\rceil-1$. 定义 C_n 一个符号树控制函数 f 如下:

$$f(e)=\begin{cases}+1 & \text{当 } e\in E\text{ 时;}\\ -1 & \text{当 } e\in B\text{ 时;}\end{cases}$$

可见 $\gamma'_T(C_n)\leq\sum_{e\in E(C_n)}f(e)=|A|-|B|=2\lceil n/2\rceil+2-n=(5-(-1)^n/2$.

另一方面,对于 C_n 上的任意一个符号树控制函数 f,令 $A=\{e\in E(C_n)\mid f(e)=+1\}$,$B=\{e==\in E(C_n)\mid f(e)=-1\}$,任取 $e_0\in A$,由于 $C_n-e_0=T_0$ 为 C_n 的一棵生成树,由定义知 $\sum_{e\in E(C_n)}f(e)=f(e_0)+\sum_{e\in E(T_0)}f(e)\geq1+1=2$,由 f 的任意性得 $\gamma'_T(C_n)\geq2$. 又由性质(1)知 $\gamma'_T(C_n)$ 与 n 同奇偶性,从而

$$\gamma'_T(C_n)\geq(5-(-1)^n)/2.$$ 证毕.

类似于上述定理的证明,可以得出下面的结论:

定理 4 当 $n\geq3$ 且为整数时,则有

(1) 当 n 为偶数时,$\gamma'_T(K_n)=n^2/4$;

(2) 当 n 为奇数时,$\gamma'_T(K_n)=\frac{(n+1)^2}{4}-1$;

定理 5 当 $n\geq3$ 且为整数时,

$$\gamma'_T(W_{n+1})=\begin{cases}4 & \text{当 } n\text{ 为奇数时;}\\ 6 & \text{当 } n\text{ 为偶数时}\end{cases}$$

定理 6 设 $m\geq n\geq2$,则有

(1) 当 m 和 n 均为奇数时,

$$\gamma'_T(K_{m,n})=mn-(m-1)(n+1)/2.$$

(2) 当 m 和 n 至少其一为偶数时,

$$\gamma'_T(K_{m,n})=mn-2\lceil m/2\rfloor\lceil n/2\rfloor$$

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty V S R. Graph Theory with Applications [M]. New Tork: Elsevier, 1976.

[2] Cockayne E J, Mynhart C M. On a generalization of signed domination functions of graphs [J], Ars. Combin. 1996, (43): 235-245.

[3] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Domination in graphs [M], New York: Marcel Dekker, INC, 1998.

[4] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Fundamental of domination in graphs [M], New York: Marcel Dekker, INC 1998.
[5] Baogen. Xu, On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math. 2001, (239): 179 – 189
[6] Baogen. Xu, On edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math. 2005, (294): 311 – 316
[7] Baogen. Xu, Two classes of edge domination in graphs [J]. Discrete Appl. Math. 2006, (154): 1541 – 1546.
[8] 徐保根,周尚超,图与补图的符号圈控制数 [J]. 江西师范大学学报(理科版), 2006, (3): 249 ~ 251.

On Signed Tree Domination Numbers of Graphs

XU Bao – gen, ZHAO Jin – feng, ZHAO hua

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper we introduce the concept of signed tree domination in graphs, we obtain a upper bound and a lower bound of signed tree domination numbers for general graphs G, and show that the two bounds are best possible. In addition, we determine the signed tree domination numbers for some special classes of graphs G, including cycles, wheels, complete graphs and complete bipartite graphs.

Key words: signed tree dominating function, signed tree domination number, cycles, wheels, complete graphs, complete bipartite graphs

(责任编辑: 周尚超)