

共形平坦流形的一类具常平均曲率的完备超曲面

吴泽九

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 设 M 是共形平坦流形 N^{n+1} 中具有常平均曲率的完备超曲面. 如果 M 的法向量是 N^{n+1} 的 Ricci 主方向, 则 (1) $S < 2\sqrt{n-1}C$ 时, M 是全脐超曲面. (2) $S = 2\sqrt{n-1}C$ 时, $M = S^1(u) \times S^{n-1}(v)$, 其中 S 是 M 的第二基本形式模长的平方, $C = (2nr - (n+1)R)/(n^2 - n)$, R 与 r 分别表示 N^{n+1} 的 Ricci 曲率的上、下确界. 该结果是文 [1, 2] 中结论的推广.

关键词: 共形平坦; 全脐; 超曲面

中图分类号: O186

文献标识码: A

1 引言和结果

设 M 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中具常平均曲率的紧致超曲面, S 表示 M 的第二基本形式模长的平方. 文 [1] 得到, 当 $S < 2\sqrt{n-1}$ 时, M 是 $S^{n+1}(1)$ 的超球面; 当 $S = 2\sqrt{n-1}$ 时, M 或为 $S^n(r_0)$, 或为环面 $S^1(r) \times S^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$, 其中 $r_0^2 = n/(n+2\sqrt{n-1})$, $r^2 = 1/(1+\sqrt{n-1})$. 文 [2] 将外围空间 $S^{n+1}(1)$ 推广到局部对称 δ -Pinched 流形中, 在超曲面完备的条件下, 得到超曲面 M 进一步的结果. 本文假定外围空间为共形平坦流形 N^{n+1} , 对其完备超曲面进行研究, 得到

定理 1 设 M 是共形平坦流形 N^{n+1} 中具有常平均曲率的完备超曲面, 记 $C = \frac{2nr - (n+1)R}{n(n-1)}$ 且 $C > 0$, 其中 R 与 r 分别表示 N^{n+1} 的 Ricci 曲率的上、下确界. 如果 M 的法向量是 N^{n+1} 的 Ricci 主方向, 则

(1) $S < 2\sqrt{n-1}C$ 时, M 是全脐超曲面.

(2) $S = 2\sqrt{n-1}C$ 时, 局部地, $M = S^1(u) \times S^{n-1}(v)$, 其中 $u^2 = \frac{1}{(\sqrt{n-1}+1)C}$, $v^2 = \frac{\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+1)C}$.

当外围流形 N^{n+1} 为截面曲率 c 的球面 $S^{n+1}(c)$ 时, 显然 M 的法向量是 $S^{n+1}(c)$ 的 Ricci 主方向, 且此时 $R = r = nc$, $C = c$, 因此由定理 1 有

推论 1 设 M 是 $S^{n+1}(c)$ 中具常平均曲率的完备超曲面, 则

(1) $S < 2\sqrt{n-1}$ 时, M 是全脐超曲面.

(2) $S = 2\sqrt{n-1}c$ 时, 局部地, $M = S^1(u) \times S^{n-1}(v)$, 其中 $u^2 = \frac{1}{(\sqrt{n-1}+1)c}$, $v^2 = \frac{\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+1)c}$.

注: 当 M 紧致且 $c = 1$ 时, 推论 1 被文 [1] 所研究; 当 $c = 1$ 时推论 1 被文 [2] 所证, 因此定理 1 和推论 1 是文 [1, 2] 中结果的推广与改进.

收稿日期: 2007-11-27

基金项目: 华东交通大学科研基金资助(06ZKJC04); 江西省自然科学基金项目(051106).

作者简介: 吴泽九(1976-), 男, 江西会昌人, 硕士, 讲师.

2 公式与引理

设 N^{n+1} 是 $n+1$ 维黎曼流形, M 是 N^{n+1} 的完备超曲面. 各种指标范围规定如下: $1 \leq A, B, C \leq \dots \leq n+1$; $1 \leq i, j, k, \dots \leq n$; 不特别说明时, Σ 表示对重复指标求和. 在 N^{n+1} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$, 使得限制在 M 上, e_{n+1} 与 M 正交, $\{e_i\}$ 与 M 相切. 设 $\{\omega_A\}$ 是关于 $\{e_A\}$ 的对偶标架场, $\{\omega_{AB}\}$ 是 N^{n+1} 的联络形式. N^{n+1} 的结构方程为

$$d\omega_A = -\sum \omega_{AB} \wedge \omega_B, \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0 \quad (2.1)$$

$$d\omega_{AB} = -\sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2} \sum K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D \quad (2.2)$$

其中 K_{ABCD} 是 N^{n+1} 的曲率张量分量. 限制在 M 上, 有

$$\omega_{n+1} = 0, \omega_{n+1i} = \sum h_{ij} \omega_j \quad (2.3)$$

$$d\omega_i = -\sum \omega_{ij} \wedge \omega_j, \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (2.4)$$

$$d\omega_{ij} = -\sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2} \sum R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l \quad (2.5)$$

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) \quad (2.6)$$

其中 R_{ijkl} 是 M 的曲率张量分量. 分别定义 h_{ijk} 及 h_{ijkl} 如下:

$$\sum h_{ijk} \omega_k = dh_{ij} - \sum h_{ki} \omega_{kj} - \sum h_{jk} \omega_{ki} \quad (2.7)$$

$$\sum h_{ijkl} \omega_l = dh_{ijk} - \sum h_{ljk} \omega_{li} - \sum h_{ilk} \omega_{lj} - \sum h_{ijl} \omega_{lk} \quad (2.8)$$

则

$$h_{ijk} - h_{ikj} = -K_{n+1ijk} \quad (2.9)$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum h_{mi} R_{mjkl} + \sum h_{mj} R_{milk} \quad (2.10)$$

N^{n+1} 是共形平坦的, 所以

$$K_{ABCD} = \frac{1}{n-1} (\delta_{AC} K_{BD} - \delta_{AD} K_{BC} + \delta_{BD} K_{AC} - \delta_{BC} K_{AD}) - \frac{K}{n(n+1)} (\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC}) \quad (2.11)$$

其中 $K_{AC} = \sum K_{ACB}$ 是 N^{n+1} 的 Ricci 张量的分量, $K = \sum K_{AA}$ 是 N^{n+1} 的数量曲率.

因为 M 的法向量是 N^{n+1} 的 Ricci 主方向, 所以对任意 i 有

$$K_{n+1i} = 0 \quad (2.12)$$

由 (2.11) (2.12), 对任意 i, j, k 有

$$K_{n+1ijk} = 0 \quad (2.13)$$

限制在 M 上, K_{n+1ijk} 的共变导数 $K_{n+1ijkl}$ 定义为

$$\sum K_{n+1ijkl} \omega_l = dK_{n+1ijk} - \sum K_{n+1mjk} \omega_{mi} - \sum K_{n+1imk} \omega_{mj} - \sum K_{n+1ijm} \omega_{mk} \quad (2.14)$$

由 (2.13) (2.14), 对任意 i, j, k, l 有

$$K_{n+1ijkl} = 0 \quad (2.15)$$

引理 1^[3] 设 $\{a_i | 1 \leq i \leq n\}$ 是满足条件 $\sum_i a_i = 0$ 的 n 个实数, 则

$$|\sum_i a_i^3| \leq \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} (\sum_i a_i^2)^{3/2}$$

等式成立当且仅当 $a_1, \dots, a_n$ 中至少有 $n-1$ 个彼此相等.

引理 2 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 对称矩阵, $n \geq 2$, 记 $T = \text{tr } A$, $s = \sum_{i,j} (a_{ij})^2$, 则

$$\sum_i (a_{ii})^2 - T a_{nn} \leq [n(n-1)s + (n-2)|T| \sqrt{(n-1)(ns - T^2)} - 2(n-1)T^2] / n^2 \quad (2.16)$$

引理 3^[5,6] 设 M 是 Ricci 曲率有下界的 n 维完备黎曼流形, F 为 M 上有上界的 C^2 函数, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$, 使得

$$\sup F - \varepsilon < F(x), \quad \|\nabla F\|(x) < \varepsilon, \quad \Delta F(x) < \varepsilon \quad (2.17)$$

3 定理的证明

设 Δ 是 M 的 Laplacian. 因为 M 的平均曲率为常数 H , 所以 $\sum_k h_{kkij} = 0$, 结合 (2.9), (2.10) 有

$$\Delta h_{ij} = -\sum K_{n+1kikj} - \sum K_{n+1ijkk} + \sum h_{mk} R_{mijk} + \sum h_{im} R_{mkjk} \quad (3.1)$$

由 (2.6), (2.15), (3.1), 则有

$$\sum h_{ij} \Delta h_{ij} = \sum h_{ij} h_{mk} K_{mijk} + \sum h_{ij} h_{im} K_{mkjk} + nH \operatorname{tr} A^3 - S^2 \quad (3.2)$$

其中 A 表示矩阵 (h_{ij}) .

选取适当的 $\{e_i\}$, 使得 $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. 于是 (3.2) 改为

$$\sum h_{ij} \Delta h_{ij} = \frac{1}{2} \sum (\lambda_i - \lambda_j)^2 K_{ijij} + nH \sum \lambda_i^3 - S^2 \quad (3.3)$$

令 $f^2 = S - nH^2$, 由 $r \leq K_{AA} \leq R$, $(n+1)r \leq K \leq (n+1)R$, 及 (2.11) 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 K_{ijij} &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (K_{jj} + K_{ii} - \frac{K}{n}) \\ &\geq \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 [nr - \frac{1}{n}(n+1)R] = nCf^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $C = [nr - (n+1)R] / (n^2 - n)$. 不失一般性, 假定 M 的平均曲率 H 非负.

因为 $\sum_i (\lambda_i - H) = 0$, $\sum_i (\lambda_i - H)^2 = f^2$, $\sum_i (\lambda_i - H)^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3Hf^2 - nH^3$, 由引理 1 有

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} f^3 \leq \sum_i \lambda_i^3 - 3Hf^2 - nH^3 \quad (3.5)$$

所以

$$nH \sum \lambda_i^3 \geq -nH \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} f^3 + 3nH^2 f^2 + n^2 H^4 \quad (3.6)$$

由 (3.3) (3.4) (3.6) 有

$$\sum h_{ij} \Delta h_{ij} \geq f^2 [nC + nH^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hf - f^2] \quad (3.7)$$

因为

$$\begin{aligned} nC + nH^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hf - f^2 \\ = nC - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} (f^2 + nH^2) + \frac{1}{2\sqrt{n-1}} [\sqrt{n-1}-1]f - [\sqrt{n-1}+1]\sqrt{n}H]^2 \\ \geq nC - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} (f^2 + nH^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

由 (3.8), (3.7) 则有

$$\sum h_{ij} \Delta h_{ij} \geq f^2 [nC - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} (f^2 + nH^2)] \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2} \Delta f^2 = \frac{1}{2} \Delta S = \sum (h_{ijk})^2 + \sum h_{ij} \Delta h_{ij} \geq f^2 [nC - \frac{n}{2\sqrt{n-1}} (f^2 + nH^2)] \quad (3.10)$$

由 (2.6) 及引理 2, 有

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \sum_j K_{ijij} + nHh_{ii} - \sum_j (h_{ij})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} (K_{jj} + K_{ii} - \frac{K}{n}) + nHh_{ii} - \sum_j (h_{ij})^2 \\ &\geq \frac{2nr - (n+1)R}{n} - \frac{n-1}{n} S - \frac{n-2}{n} H \sqrt{n(n-1)} (S - nH^2) + 2(n-1)H^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

在定理条件 $S \leq 2\sqrt{n-1}C$ 下,故 M 的 Ricci 曲率有下界.

给定正数 ε , 令 $F = (f^2 + a)^{1/2}$, 由定理条件可知 F 是有上界的函数, 应用引理 3, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M$, 使得

$$\sup F - \varepsilon < F(x), \quad \|\nabla F\|(x) < \varepsilon, \quad \Delta F(x) < \varepsilon \quad (3.12)$$

对 F 求微分及 Laplace 算子有

$$F\Delta F = -\|\nabla F\|^2 + \frac{1}{2}\Delta f^2 \quad (3.13)$$

由 (3.12), (3.13) 有

$$\frac{1}{2}\Delta f^2(x) = \|\nabla F\|^2(x) + F(x)\Delta F(x) < \varepsilon^2 + F(x)\varepsilon \quad (3.14)$$

选取数列 $\{\varepsilon_m\}$, 使 $\{\varepsilon_m\} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 对每一个 m , 存在点 $x_m \in M$, 使得 (3.12) 成立, 而且 $\varepsilon_m^2 + \varepsilon_m F(x_m) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$. 再由 (3.12), $F(x_m) > \sup F - \varepsilon_m$, $\{F(x_m)\}$ 是有界数列, 因此 $\{F(x_m)\}$ 有极限, 不妨设极限为 F_0 , 即 $F(x_m) \rightarrow F_0$, 因此 $F_0 \geq \sup F$, 故有 $F_0 = \sup F$, 再由 F 的定义, 有

$$f(x_m) \rightarrow f_0 = \sup f$$

由 (3.10), (3.14) 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^2 + \varepsilon_m F(x_m) &> \frac{1}{2}\Delta f^2(x_m) \\ &\geq f^2(x_m) \left[nC - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}(f^2(x_m) + nH^2) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, 因此

$$f_0^2 \left[nC - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}(f_0^2 + nH^2) \right] \leq 0 \quad (3.16)$$

(1) 当 $S < 2\sqrt{n-1}C$ 时, $f_0^2 + nH^2 < 2\sqrt{n-1}C$, 即 (3.16) 右端的第二个因式大于 0, 故 $f_0^2 = 0$, 即 $f^2 = 0$, M 全脐.

(2) 当 $S = 2\sqrt{n-1}C$ 时, $f^2 = 2\sqrt{n-1}C - nH^2$ 为常数, 由 (3.9) (3.10) 有

$$h_{ijk} = 0, \quad \sum h_{ij} \Delta h_{ij} = 0 \quad (3.17)$$

因此 (3.9) 及 (3.10) 中等号成立, 且 (3.4), (3.5), (3.8) 全变成等式.

当 (3.8) 变成等式时, 有

$$(\sqrt{n-1}-1)f = (\sqrt{n-1}+1)\sqrt{n}H \quad (3.18)$$

此时 M 不全脐, 若不然, 有 $f = 0$, 由 (3.18) 知 $H = 0$, 从而 $S = 0$ 与题设 $S = 2\sqrt{n-1}C \neq 0$ 矛盾. 因为 (3.5) 变为等式, 由引理 1 及 M 不全脐, 可假定 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$. 由于 $K_{AA} - r \geq 0$ 及 $R - K_{AA} \geq 0$, 当 (3.4) 等号成立时, 有

$$\sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 [K_{jj} - r] + (K_{ii} - r) + \frac{1}{n} \sum_A (R - K_{AA}) = 0$$

所以

$$K_{11} = K_{22} = \cdots = K_{nn} = r, \quad K_{11} = K_{22} = \cdots = K_{nn} = K_{n+1n+1} = R$$

于是 $K_{AA} = r = R$, N^{n+1} 是爱因斯坦空间, 由 N^{n+1} 的共形平坦性知 N^{n+1} 是常曲率空间, 其截面曲率为

$$K(e_A \wedge e_B) = \frac{1}{n-1} (K_{BB} + K_{AA} - \frac{K}{n}) = \frac{r}{n} = \frac{R}{n} = C, \quad (3.19)$$

此时 N^{n+1} 变为球面 $S^{n+1}(C)$.

在 $S^{n+1}(C)$ 上选取适当 $\{e_i\}$, 使得 $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. 在 (2.4) 式中, 令 $i = j$, 有 $\omega_{ij} = 0$, 在 (2.7) 式中, 令 $i = j$, 结合 (3.17) 有

$$0 = d\lambda_i + 2 \sum_k h_{ki} \omega_{ki} = d\lambda_i + 2\lambda_i \omega_{ii} = d\lambda_i$$

因此 λ_i 为常数, 再由 (2.7) 有

$$0 = \lambda_i \omega_{ij} + \lambda_j \omega_{ji} = (\lambda_i - \lambda_j) \omega_{ij} \quad (3.20)$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 由上式有

$$\omega_{12} = 0 \quad (3.21)$$

由 (2.5) (3.21) 有

$$0 = d\omega_{12} = \sum \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} - \frac{1}{2} \sum R_{12kl} \omega_k \wedge \omega_l$$

如果对某一 k 使得 $\omega_{1k} \neq 0$ 和 $\omega_{k2} \neq 0$, 则由 (3.21) 有 $\lambda_1 = \lambda_k = \lambda_2$, 这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾, 因此 $\sum R_{12kl} \omega_k \wedge \omega_l = 0$, 故

$$R_{1212} = 0 \quad (3.22)$$

由 (3.22) (3.19) (2.6) 及题设 $S = 2\sqrt{n-1}C$ 有

$$\lambda_1 \lambda_2 = -C \quad (3.23)$$

$$\lambda_1^2 + (n-1)\lambda_2^2 = 2\sqrt{n-1}C \quad (3.24)$$

再由 (3.23) (3.24) 有

$$\lambda_1^2 = C\sqrt{n-1}, \lambda_2^2 = C/\sqrt{n-1}$$

因此 N^{n+1} 变为球面 $S^{n+1}(C)$, 且 $\lambda_1^2 = C\sqrt{n-1}, \lambda_2^2 = C/\sqrt{n-1}$. 与文 [7, p68] 讨论完全一样, 局部地 $M =$

$S^1(u) \times S^{n-1}(v)$, 其中 $u^2 = \frac{1}{\sqrt{(n-1)+1}C}, v^2 = \frac{\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+1)C}$. 定理 1 得证.

参考文献:

- [1] Hou, Z. H. Hypersurfaces in a sphere with constant mean curvature [J]. Proc. of Amer. Math. Soc., 1997, 125(4): 1193–1196.
- [2] 舒世昌, 刘三阳. 局部对称流形的具常平均曲率的完备超曲面 [J]. 数学年刊, 2004, 25A(1): 99–104.
- [3] Alencar H, Do Carmo M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres [J]. Proc Amer Math Soc., 1994, (120): 1223–1229.
- [4] 蔡开仁, 欧氏空间中闭子流形的拓扑 [J]. 数学年刊, 1987, 8A(2): 234–241.
- [5] Omori, H. Isometric immersion of Riemannian manifolds [J]. J. Math. Soc. Japan, 1967, (19): 205–214.
- [6] Yau, S. T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds [J]. Comm. Pure and Appl. Math., 1975, (28): 201–228.
- [7] Chern, S. S., do Carmo, M. & Kobayashi, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length [A], Functional Analysis and Related Fields. New York: Springer-Verlag, 1970, 59–75.

Some Complete Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in a Conformally Flat Manifold

WU Ze-jiu

(School of Basic Science Departments, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013 China)

Abstract: Let M be a complete hypersurface with constant mean curvature in a $n+1$ -dimensional conformally flat manifold N^{n+1} . Assume that the normal vectors of M be the main Ricci direction of N^{n+1} . (1) If $S < 2\sqrt{n-1}C$, then M is totally umbilical; (2) If $S = 2\sqrt{n-1}C$, then M is the product immersion $S^1(u) \times S^{n-1}(v)$, while denoted by S the square of the length of the second fundamental form of M and by R and r the supremum and infimum of Ricci Curvature of M respectively and $C = [nr - (n+1)]R/(n^2 - n)$. The conclusion generalizes the corresponding results of reference [1, 2].

Key words: conformally flat; totally umbilical; hypersurface

(责任编辑: 周尚超)