第25卷第2期 华 东 交 通 大 学 学 报 Vol. 25 No. 1
2008年4月 Journal of East China Jiaotong University Apr. ,2008

文章编号:1005-0523(2008)01-0064-04

一类二阶常微分方程多重正解的存在性

左黎明

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要: 由于物理学和力学中的许多问题最终可以归结为一类二阶常微分方程的边值问题,此类问题的解的存在性和多重性得到了许多学者的研究. 通过将常微分方程转化为非线性积分方程,利用锥拉伸和锥压缩不动点定理和不动点指数讨论了一类二阶常微分方程的正解存在性问题,在一定条件下,得到了几个多重正解定理,同时证明了与此相关的主要引理.

关 键 词: 不动点; 锥; 正解

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A

本文研究一类常微分方程二阶边值问题:

(P1)

$$u'' + g(t)f(u) = 0, 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$\alpha u(0) + \beta u'(0) = 0, \tag{2}$$

$$\gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \tag{3}$$

的多重正解的存在性. 其中 $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ 和 $g: [0, 1] \to [0, \infty)$ 为连续函数,且在(0,1)的任何子区间 $g(t)$ 不恒为0. $\alpha,\beta,\gamma,\delta > 0, \rho = \gamma\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$.

将方程(1)转化为积分方程的形式:

$$Au(t) = u(t), \tag{4}$$

其中 $Au(t) := \int_0^1 k(t,s)g(s)f(u(s))ds$, $k(t,s)$ 表示其边值问题对应的 Green 函数,

$$k(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}(\gamma + \delta - \gamma t)(\beta + \alpha s) & 0 \le s \le t \le 1 \\ \frac{1}{\rho}(\gamma + \delta - \gamma s)(\beta + \alpha t) & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases} \tag{5}$$

记 $I = [0,1]$, I 上连续函数的全体记为 $C(I)$,其上的范数 $\|\cdot\|_c$ 定义为:

$$\|u\|_c = \max_{t\in I}|u(t)|, \forall u \in C(I). \tag{6}$$

I 上可积函数的全体记为 $L(I)$,其上的范数 $\|\cdot\|_L$ 定义为:

$$\|u\|_L = \int_0^1 u(t)dt, \forall u \in L(I) \tag{7}$$

显然 $k(t,s)$ 为 $I\times I$ 上的连续函数,$g(s)$ 为 I 的连续函数,因此在闭区域上存在最大值和最小值,记:

$$M = \max_{(t,s)\in I\times I} k(t,s), m = \min_{(t,s)\in I\times I} k(t,s), H = \max_{s\in I}\int_0^1 k(t,s)dt, h = \min_{s\in I}\int_0^1 k(t,s)dt, L = \max_{s\in I} g(s),$$

收稿日期: 2007-12-12

基金项目: 江西省教育厅项目(赣教技字[2006]123号);江西省自然科学基金项目(2007GZS1054)

作者简介: 左黎明(1981-),男,江西鹰潭人,助教,理学硕士,软件工程师,主要研究方向:非线性泛函分析,信息安全.

$l=\min\limits_{s\in I} g(s)$. 显然 $L,l>0$. 记 $\|f\|_{[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

定义锥:

$$P=\{u\in C(I)\mid u(t)\geq 0,\forall t\in I\}\tag{8}$$

$$P_1=\{u\in C(I)\mid u(t)\geq 0,\forall t\in I;\ \|u\|_L\geq\frac{h}{M}\|u\|_c\}\tag{9}$$

易知 P 为正规体锥,因为 $P_1\subset P$,所以 P_1 也为正规体锥.

1　几个引理

引理 1[4]　设 Ω_1,Ω_2 是 Banach 空间 E 中有界开集,P 是 E 中的一个锥,$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$ 全连续,如果满足以下条件之一:

(1) $Ax\ngeq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1;Ax\nleq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$

(2) $Ax\ngeq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1;Ax\nleq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$

则 A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中必具有不动点.

引理 2[4]　设 E 为 Banach 空间,P 是 E 中的一个锥,对 $d>0$,定义 $\Omega_d=\{x\in P:\ \|x\|<d\}$,又设 $A:P\to P$ 为全连续算子,在 $\partial\Omega_d$ 上,$Ax\neq x$.

(1) 如果对 $x\in\partial\Omega_d$, $\|x\|\leq\|Ax\|$,则 $i(A,\Omega_d,P)=0$;

(2) 如果对 $x\in\partial\Omega_d$, $\|x\|\geq\|Ax\|$,则 $i(A,\Omega_d,P)=1$.

引理 3　A 为 $P\to P_1$ 上的全连续算子.

证明　$$\|Au\|_L=\int_0^1 dt\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u(s))ds\geq h\int_0^1\frac{k(t,s)}{M}g(s)f(u(s))ds$$

$$=\frac{h}{M}\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u(s))ds$$

$$=\frac{h}{M}Au(t),\forall u\in P,t\in I$$

因此,$\|Au\|_L\geq\frac{h}{M}\|Au\|_C$,$A(P)\subset P_1$.

下证 $A:P\to P_1$ 全连续.

设 $u_i\in P(i=1,2,3,\cdots)$ 且 $i\to\infty$ 时,u_1 依范数 $\|\cdot\|_C$ 收敛到 u_0. 则 $u_0\in P$,且:

$$\|Au_i-Au_0\|_C=\max_{t\in I}|Au_i(t)-Au_0(t)|\leq M\int_0^1 g(s)[f(u_i(s))-f(u_0(s))]ds\to 0(i\to\infty)$$

所以 Au_i 依范数 $\|\cdot\|_C$ 收敛到 Au_0,因此 $A:P\to P_1$ 连续.

任给 P 中有界集 S,存在 r,使得任给 $u\in S$, $\|u\|_C\leq r,\forall u\in S$,

$$Au(t)\leq M\int_0^1 g(s)f(u(s))ds\leq M\cdot L\cdot\|f\|_{[0,r]}\tag{10}$$

因此,$A(S)$ 在 $C(I)$ 中一致有界.

$k(t,s)$ 在 $I\times I$ 上连续,故一致连续. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in I\times I$ 且满足 $d((t_1,s_1),(t_2,s_2))<\delta$ 时,$|k(t_1,s_1)-k(t_2,s_2)|<\varepsilon$. (其中 $d(\cdot,\cdot)$ 表示两点间距离)

于是当 $t_1,t_2\in I$ 且 $d(t_1,t_2)<\delta$ 时,$|k(t_1,s)-k(t_2,s)|<\varepsilon,\forall s\in I$. $\forall u\in S$,

$$|Au(t_1)-Au(t_2)|\leq\int_0^1 k(t_1,s)-k(t_2,s)|\cdot g(s)\cdot f(u(s))ds\leq\varepsilon\cdot L\cdot\|f\|_{[0,r]}\tag{11}$$

因此,$A(S)$ 在 $C(I)$ 中等度连续. 由 Arezela - Ascoli 定理知 $A(S)$ 为 $C(I)$ 中列紧集,从而也为 P_1 和 P 中列紧集. 由于 S 的任意性,所以 $A:P\to P_1$ 为紧算子,从而 $A:P\to P_1$ 的全连续算子,证毕!

2　主要定理

A 是 $P\to P_1$ 上的全连续算子,但 $P_1\subset P$,因此 A 也是 $P_1\to P_1$ 上的全连续算子. 首先给出几个条件:

($H1$) 存在常数 $\alpha,\beta(0<\alpha<1,\beta>1)$,使得对任给 $u(s)\in P,s\in I$,有:

$$f(u(s))\geq\max((u(s))^{\alpha},(u(s))^{\beta}).$$

($H2$) 存在数 e_2 和 e_3 满足: $(lh)^{1/(1-\alpha)}=r_1<e_2<e_3<r_2=(\frac{M}{h^{1+1/\beta}\cdot l^{1/\beta}})^{\beta/\beta-1}$,其中:

$$e_i>ML\|f\|_{[0,e_i]}\ (i=2,3)$$

(H3) 存在数 w_1,满足 $r_1<e_2<w_1<e_3<r_2$,当 $w=\|u\|_C$,有: $w\leq hl\int_0^1 f(u(s))ds$.

定理 1 若 A 满足(H1) 和(H2) ,则 A 至少有两个不动点,即常微分方程二阶边值问题(P1) 至少有两个非零正解.

证明 下面我们考虑 $A:P_1\to P_1$. 记 $\Omega_r=\{\|x\|_C<r,x\in P_1\}$.

1) 任意取定 $e_1\in(0,r_1)$ (其中 $r_1=(lh)^{1/1-\alpha}$) ,则:

$$\forall u\in\partial\Omega_{e_1},Au\not\leq u. \tag{12}$$

否则,$\exists u_1\in\partial\Omega_{e_1}$,使得 $Au_1\leq u_1$. 由 $0\leq u_1(t)\leq e_1$ 知

$\forall t\in I,0\leq(u_1(t))^{1-\alpha}\leq e_1^{1-\alpha},u_1\leq(u_1(t))^{\alpha}e_1^{1-\alpha}$. $\forall t\in I$,有:

$$u_1(t)\geq Au_1(t)\geq\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u_1(s))ds\geq\int_0^1 k(t,s)g(s)(u_1(s))^{\alpha}ds\geq\frac{l}{e_1^{1-\alpha}}\int_0^1 k(t,s)u_1(s)ds$$

不等式两边积分,得:

$$\int_0^1 u_1(t)dt\geq\frac{l}{e_1^{1-\alpha}}\int_0^1 dt\int_0^1 k(t,s)u_1(s)ds\geq\frac{lh}{e_1^{1-\alpha}}\int_0^1 u_1(s)ds \tag{13}$$

因为 $\int_0^1 u_1(t)dt>0$,所以 $\frac{lh}{e_1^{1-\alpha}}\leq1$,即 $e_1\geq(lh)^{1/(1-a)}=r_1$,与 e_1 取法矛盾,因此(12) 成立.

2) $\forall u\in\partial\Omega_{e_2},Au\not\geq u. \tag{14}$

否则,$\exists u_2\in\partial\Omega_{e_2}$,使得 $Au_2\geq u_2$. 则:

$$e_2=\|u_2\|_C\leq\|Au_2\|_C=\|\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u_2(s))ds\|_C\leq M\cdot L\cdot\|f\|_{[0,e_2]}<e_2$$

矛盾! 因此(14) 成立.

同理可证: $\forall u\in\partial\Omega_{e_3},Au\not\geq u. \tag{15}$

3) 任意取定 $e_4\in(r_2.TIF,+\infty)$,则:

$$\forall u\in\partial\Omega_{e_3},Au\not\leq u. \tag{16}$$

否则,$\exists u_3\in\partial\Omega_{e_4}$,使得 $Au_3\leq u_3$.

$$\|Au_3\|_C\geq\int_0^1 Au_3(t)dt\geq\int_0^1 dt\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u_3(s))ds\geq hl\int_0^1(u_3(s))^{\beta}ds$$

由 holder 不等式,知: $\int_0^1 u_3(s)ds\leq\int_0^1 1ds\cdot\ [\int_0^1 u_3(s))^{\beta}ds]^{1/\beta} \tag{17}$

因此

$$e_4=\|u_3\|_C\leq\frac{M}{h}\|u_3\|_L=\frac{M}{h}\int_0^1 u_3(s)ds\leq\frac{M}{h}[\int_0^1(u_3(s))^{\beta}ds]^{1/\beta}\leq\frac{M}{h}(\frac{\|Au_3\|_C}{hl})^{1/\beta} \tag{18}$$

而 $\|Au_3\|_C\leq\|u_3\|_C=e_4 \tag{19}$

将(19) 代入(18) ,得

$$e_4\leq M/h(e_4/hl)^{1/\beta} \tag{20}$$

即: $e_4\leq(\frac{M}{h^{1+1/\beta}\cdot l^{1/\beta}})^{\beta/(\beta-1)}=r_2$

这与 e_4 取法矛盾,故(16) 成立.

由锥拉伸压缩不动点定理,从(12) 和(14) 推出至少存在 A 的一个不动点 $x_1\in\Omega_{e_2}/\overline{\Omega}_{e_1}$,从(15) 和(16) 至少存在 A 的另一个不动点 $x_2\in\Omega_{e_4}/\overline{\Omega}_{e_3}$. 因此 A 至少有两个不动点,即常微分方程二阶边值问题($P1$) 至少

有两个非零正解,证毕!

定理2 若A满足(H1)、(H2)和(H3),则A至少有四个不动点,即常微分方程二阶边值问题(P1)至少有四个非零正解.

证明 前半部分与定理1相同.现在我们考虑$A:P\to P$.记$\Omega_r=\{\|x\|_C<r,x\in P\}$.$\forall u\in\partial\Omega_{e_2}$,由条件(H2),有:

$$\|Au\|_C=\|\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u(s))ds\|_C\leq M\cdot L\cdot\|f\|_{[0,e_2]}<e_2=\|u\|_c$$

因此由引理2,$i(A,\Omega_{e_2},P)=1$,同理可证$i(A.\Omega_{e_3},P)=1$.

$\forall u\in\partial\Omega_{w_1}$,由条件($H3$),有:

$$\|Au\|_C\geq\|\int_0^1 Au(t)dt\geq\int_0^1 dt\int_0^1 k(t,s)g(s)f(u(s))ds\geq h\int_0^1 g(s)fu(s))ds\geq hl\int_0^1 f(u(s))ds$$

$$\|u\|_C=w_1\leq hl\int_0^1 f(u(s))ds\leq\|Au\|_C$$

因此由引理2,$i(A,\Omega_{w_1},P)=0$.

注意到$\Omega_{e_2}\subset\Omega_{w_1}\subset\Omega_{e_3}$,因此:

$$i(A,\Omega_{w_1}/\overline{\Omega}_{e_2},P)=-1,i(A,\Omega_{e_3}/\overline{\Omega}_{w_1},P)=1.$$

于是在$\Omega_{w_1}/\overline{\Omega}_{e_2}$和$\Omega_{e_3}/\overline{\Omega}_{w_1}$内至少各有一个不动点.结合定理1中证明,因此$A$至少有四个不动点,即常微分方程二阶边值问题($P1$)至少有四个非零正解,证毕!

参考文献:

[1] 张国伟.一类奇异两点边值问题的正解[J].应用数学学报,2006,(2):297-309.
[2] 马如云.非线性常微分方程非局部问题[M].北京:科学出版社,2004.
[3] 郭大均.非线性分析中的半序方法[M].济南:山东科技大学出版社,2000.
[4] 郭大均.非线性泛函分析[M].济南:山东科技大学出版社,2004.

Multiple Positive Solutions Theorem of a Class of the Second Order Differential Equations Problems

ZUO Li-ming

(School of Natural Science,East China Jiaotong University.,Nanchang 330013,China)

Abstract: Owing to the importance of a class of second order differential equations problems in physics and mechanics,the existence and multiplicity of the solutions to those problems have been studied by many scholars. By changing differential equations into nonlinear integral equation,we study the existence of positive solution of a class of second order differential equations problems by the fixed point theorem of cone expansion and compression,and the fixed point index theorem,then we obtain two multiple positive solutions theorems under some conditions,and give the proof of main lemmas that are important to our discussion.

Key words: fixed-point; cone; positive solution

(责任编辑:周尚超)