第25卷第2期　　华 东 交 通 大 学 学 报　　Vol. 25　No. 2
2008年4月　　Journal of East China Jiaotong University　　Apr. ,2008

文章编号:1005－0523(2008)02－0068－02

概率方法在超图中的应用

毛俊超[1],孙　姝[1],张丽超[2]

(1. 海军潜艇学院 军事运筹教研室,山东 青岛 266071;2. 燕山大学 里仁学院 基础教学部,河北 秦皇岛 066004)

摘要: 概率方法是解决离散数学中许多问题的强有力工具,它在超图着色问题中有着重要的应用,Erdøs[1] 和 Beck[2] 利用概率方法研究不具备特征 B 的 n－一致超图的边的最小可能数 $m(n)$,得到了有关 $m(n)$ 的下界. 利用概率方法研究 $m(n)$ 的上界,得到了有关 $m(n)$ 的一个上界.

关　键　词: 概率方法;超图;上界

中图分类号: O157.5　　　　**文献标识码:** A

1　定义和引理

定义 1[1]　**超图(hypergragh):** 超图是一个对(V,E),其中 V 是一个有限集合,其元素叫做顶点,E 是 V 的子集族,叫做边集. 称超图 H 是 n－一致的,如果它的每个边恰好包含 n 个顶点. 称超图 H 具有特征 B,或者说它是 2－色的,如果存在 V 的一个 2－边着色,使得没有边是单色的.

$m(n)$ 表示: 不具备特征 B 的 n－一致超图的边的最小可能数.

1963 年 Erdøs 用概率方法证明了一个有关 $m(n)$ 的下界的命题.

引理 1.1[2]　任何一个具有少于 2^{n-1} 条边的 n－一致超图具有特征 B,因此 $m(n)\geqslant 2^{n-1}$.

证明该命题的方法很简单,利用基本概率方法就可以证明. 但该命题首次给出 $m(n)$ 的一个下界,为以后的研究工作奠定了理论基础; Beck 于 1978 年把该下界改进到 $m(n)=\Omega(2^n n^{\frac{1}{3}})$[2]; 利用 Beck 的方法,Radhakrishnan 和 Srinivasan 于 2000 年证明了 $m(n)=\Omega(2^n(n/\ln n)^{\frac{1}{2}})$[4]; 随后,N. Alon 采用 Radhakrishnan 的证明方法得到了下述结论:

引理 1.2[5]　若存在 $p\in[0,1]$ 使得 $k(1-p)^n+k^2p<1$,那么 $m(n)\geqslant 2^{n-1}k$.

上面考虑的都是 $m(n)$ 的下界,下面考虑 $m(n)$ 的上界. 基本思想是把超图中的顶点视为随机的,把每种染色定义为一个基本事件,利用概率的方法,可以得到下面的结论.

2　主要结论

定理 2.1　$m(n)\leqslant\left\lceil v\binom{v}{n}\ln 2/2\binom{\lceil v/2\rfloor}{n}\right\rceil$,$v$ 为 n－一致超图的顶点数.

证明　设 V 是 v 个顶点的集合,令 X 表示 V 的一种染色: a 个顶点染一种颜色,$b=v-a$ 个顶点染另一种

收稿日期:2008－02－28

作者简介:毛俊超(1976－),男,山东平邑人,助教.

颜色. $S\subset V$ 是从 V 的元素中均匀选择得到的 n 元集. 则 P(在 X 下 S 是单色的) $=P\binom{a}{n}+\binom{b}{n}/\binom{v}{n}$. 为方便起见，假设 v 是偶数，因为 $\binom{y}{n}$ 是上凸的，所以 $\binom{a}{n}+\binom{b}{n}$ 在 $a=b$ 时值最小，于是 P(在 X 下 S 是单色的) $\geqslant P$，其中 $p=2\binom{v/2}{n}/\binom{v}{n}$，(若 v 为奇数取 $p=2\binom{\lceil v/2\rfloor}{n}/\binom{v}{n}$) 于是取 $p=2\binom{\lceil v/2\rfloor}{n}/\binom{v}{n}$. 令 S_1，S_2，$\cdots S_m$ 是从 V 中均匀、独立选择出的 n 元集，m 待定. 对每种着色 X，令 A_X 表示事件：S_i 中没有单色的. 由独立性 $P(A_X)\leqslant(1-p)^m$. 因为有 2^v 种染色，由 A_X 的相互独立性，得 $P(\cup_X A_X)\leqslant 2^v(1-p)^m$. 当 $2^v(1-p)^m<1$，$P(\cap_X\overline{A}_X)=1-P(\cup_X A_X)>0$，即存在 S_1，S_2，$\cdots S_m$ 使得没有 A_X 发生，即 S_i 中有些是单色的，所以 $m(n)\leqslant m$. 由不等式 $1-p\leqslant e^{-p}$，当 $m=\lceil v\ln 2/p\rceil$，$2^v(1-p)^m<2^v e^{-pm}\leqslant 1$，从而 $m(n)\leqslant m$，得证.

参考文献：

[1] P. Erdøs. On a combinatorial problem I [J]. Nordisk Mat. Tisdkr. 1963，11：5 – 10.

[2] J. Beck. On 3 – chromatic hyper graphs [J]. Disc. Math，1998，24：127 – 137.

[3] J. A. Bondy. U. S. R. Murty. Graph theory with applications [M]. New York：Macmillan，1976.

[4] J. Radhakrishnan，A. Srinivasan. Improved bounds and algorithms for hypergraph two – coloring [J]. Random structures and algorithms，2000，(16)：4 – 32.

[5] N. Alon，J. Spencer. Probabilistic Method [M]. New York：Willey – interscience Publication：2000.

Application of Probabilistic Method in Hypergragh

MAO Jun – chao[1]，SUN Shu[1]，ZHANG Li – chao[2]

(1. Military Operations Research and Teaching Section，Navy Submarine Academy，Qingdao266071；
2. Foundational Department，Liren College of Yanshan University，Qinhuang dao 066004，China)

Abstract： The probabilistic method is a powerful tool for solving discrete mathematic problems，they have many important applications in hypergragh. By means of the probabilistic method，Erdøsand and Beck obtain lower bounds of $m(n)$ by using the minimum possible number of an n – uniform hypergragh that does not havproperty B. The paper studies the upper bound through upper bound of probabilistic method.

Key words： probabilistic method；hypergragh；upper bound

（责任编辑：周尚超）