

非理想边缘电容器电容的分析

邱万英

(华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 电容器是广为应用的电子器件之一. 由于电容器的边缘不规则和具有明显的边缘效应, 使电容的标称值与其实际值不符, 常会引起无法预料的电容击穿等线路故障. 通过对两类具有非理想边缘的矩形平行板电容器电容的分析, 得出了具有较明显边缘效应的电容器电容的半定量结果和两板不严格平行的电容器电容的定量结果, 指出了在实际应用中应注意的有关问题.

关键词: 非理想边缘电容器; 矩形平行板电容器; 边缘效应; 半定量电容; 定量电容

中图分类号: TM53

文献标识码: A

具有非理想边缘的电容器可分为两大类: 一类是会产生较明显边缘效应的电容器, 另一类是边缘不规则的电容器. 该文对具有上述两类情况的矩形平行板电容器的电容作半定量与定量分析.

1 具有较明显边缘效应的电容器

1.1 电容器边缘效应的特定含义

通常, 电容器边缘效应指: 由于电容器边缘处以及外表面电荷分布与中部电荷分布不同, 因而造成的电场分布不同所产生的效应. 文献[1]给出的电容器计算式, 如平行板电容器电容计算式

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (1)$$

以及单位长圆柱形电容器电容计算式

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} \quad (2)$$

等, 往往是忽略这种效应的近似式, 即把电容器边缘处电荷分布与中部电荷分布视为相同, 把电容器外表面(一般指非正对的面积部分)的电荷忽略不计. 这种处理方法称之为“忽略边缘效应”. “忽略边缘效应”计算的电容, 可能与实际电容值相差甚远, 进而造成人们对电路产生故障的估计不足以产生严重后果.

1.2 电容器边缘效应的常见类型

有限大平行板电容器和有限长圆柱形电容器具有较明显的边缘效应.

图1为有限大矩形平行板电容器示意图. 不难看出, 其边缘处电荷分布, 电场分布与中心处相比显然不同. 另外, 极板的外表面上也有少量的电荷分布, 而在推导式(1)时, 这些都被忽略.

图2为有限长圆柱形电容器示意图. 图3画出了其中心区域横截面上的电场分布, 为沿径向辐射状的非均匀电场, 但其上、下底面边缘处的电场却不沿径向, 而在推导式(2)时, 这也被忽略. 若电容器两极之间充有电介质, 但边缘处的电介质明显不足, 也会产生边缘效应.

收稿日期: 2008-02-23

作者简介: 邱万英(1963-), 女, 江西赣州人, 副教授, 硕士, 主要研究大学物理教学与理论物理.

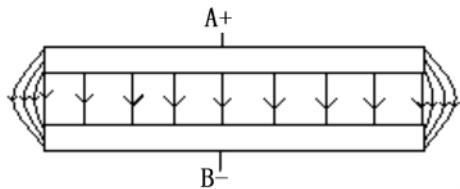


图1 平行板电容器

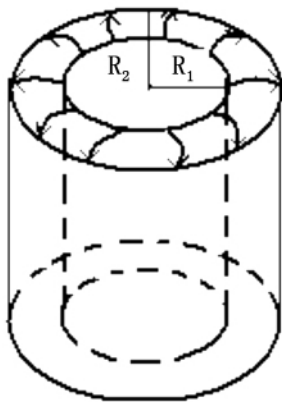


图2 有限长圆柱形电容器

1.3 边缘效应的根源分析

边缘效应的根源是静电荷分布的差异所致。以矩形平行板电容器为例。理想的平行板电容器的每块极板被视为没有厚度的几何平面，而实际上每块极板都是六面体，除去一个正对面以外，还有五个面都有电荷分布。当正对面积不大，极板的厚度又不小时，那五个面的电荷分布就不容忽视。

倘若用式(1)计算电容，所得的值会比实际值小许多。如果两极间充有电介质而边缘处的介质又明显不足，无论是哪种形状的电容器，都会导致边缘处极化电荷少而使该处电场远比中部强的边缘效应，忽略这种效应算出的电容值跟实际值相差很大，这也是引起强电控制系统中电容器击穿事故的主要原因之一。

1.4 计及边缘效应的电容定量与半定量分析

不失一般性，仅以介质为空气的平行板电容器为例。

设每块极板所带电量的绝对值为 $Q = Q_1 + Q_2$ ，其中 Q_1 为极板正对面积所带电量绝对值， Q_2 为极板边缘和非正对面积部分所带电量绝对值。据电容器电容定义，以及电容器两极间的电势差 U 的计算式

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3)$$

得

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} \quad (4)$$

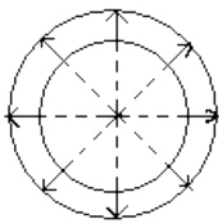


图3 中心区电场分布

令 σ_1 为正对面积所带电荷面密度，则

$$\frac{Q_1}{U} = \frac{\sigma_1 S}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} = \frac{\sigma_1 S}{\int_A^B \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} dr} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (5)$$

式(4) (5)中的 U S d 依次是电容器两极间电压，正对面积，两极间距离。式(5)正好是不计边缘效应的平板电容器电容。显然

当 $\frac{Q_1}{U} \gg \frac{Q_2}{U}$ 时，有

$$C \approx \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (6)$$

计及边缘效应，电容应为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d} + \frac{Q_2}{U} \quad (7)$$

要得出(7)式中 Q_2 的解析解,需要相当大的篇幅,因此只做半定量讨论.

根据高斯定理,导体表面各点的面电荷密度 σ 应由导体表面附近的电场强度大小决定: $\sigma = \varepsilon_0 E$, 因此, $Q_2 = \sigma_2 S_2 = \varepsilon_0 E S_2$, 即 Q_2 的值应由导体表面附近的电场强度值和导体表面积大小 S_2 共同确定. 文献[2]对平行板电容器两板周围各处的电场强度 E 进行了研究,得出的 E 结果如下式

$$E = \frac{1}{\sqrt{e^{4\pi u/U} + 2e^{2\pi u/U} \cos \frac{2\pi v}{U} + 1}} \frac{U}{d} \quad (8)$$

式(8)中的 U 是平行板电容器两板间的电势差, v 是两板周围各点 (x, y) 的电势分布函数. 图4画出了二维平面上 $x \leq 0$ 空间, 两板的电势分别为 $v(x, d/2) = U/2$ 和 $v(x, -d/2) = -U/2$. u 与 v 满足科西-里曼方程和拉普拉斯方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

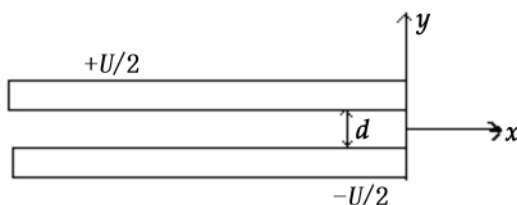


图4 平行板电容器二维平面图

v 与 u 由式(9)互相联系着, 只要已知两者中的任一个, 即可求出另一个. 对于给定的 v 和 u , 通过沿着一定的等势线 $v(x, y) = \text{常数}$ 进行分析, 就可以得到相应的 E 分布, 从而得出 Q_2 的值. 限于篇幅, 文章不作深入分析.

若 $\frac{Q_1}{U}$ 与 $\frac{Q_2}{U}$ 相当, 式(6)算出的电容已不能准确表达电容值, 而必须用式(7)估算. 可以看出, 当 Q_1 一定时, Q_2 越小, 由(6)式算出的电容就越接近实际值. 而若要 Q_2 小, 则应使极板的厚度远小于极板正对面积. 但有许多电容器的极板正对面积数量级在 10^2 mm^2 左右, 按照“远远小于”的概念, 这就意味着极板的厚度应控制在数量级 10^{-1} mm 左右, 如此薄的厚度, 极易引起强烈的尖端效应, 导致场强无限大而击穿电容器, 此时, 电容器两极的电压可能远远低于预计的击穿电压, 因此, 当电路产生此类故障时, 往往很难查出故障的真正原因, 应该引起注意.

2 边缘不规则的电容器

以矩形“平行板电容器”为例. 边缘规则的电容器应该是两极板严格平行的. 由于制作工艺水平等因素, 导致“平行板电容器”两极板不严格平行, 而是有一微小夹角 θ , 如图5所示. 为方便计算, 设极板的长和宽均为 L , 两板近端距离, 远端距离分别为 d_1, d_2 . 不计边缘效应, 该电容器的电容为 $C \approx \varepsilon_0 S/d_1$

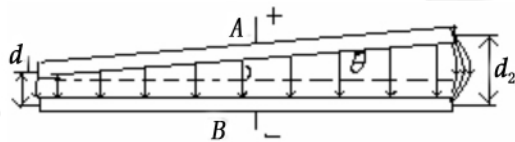


图5 极板间有微小夹角

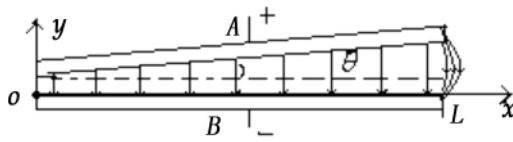


图6 考虑 θ 的电容计算

考虑因 θ 引起的效应, 建立如图6所示的直角坐标系, 电容器的电容可由下式求得

$$C = \int dC = \int \frac{\varepsilon_0 ds}{y} = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\varepsilon_0 L dy}{y} \cot \theta = \varepsilon_0 L \cot \theta \ln \frac{d_2}{d_1} = \varepsilon_0 L \cot \theta \ln \left(1 + \frac{L \sin \theta}{d_1} \right) \quad (10)$$

当 θ 很小时, 有 $\cot \theta \approx \frac{1}{\theta}$, $\sin \theta \approx \theta$ 代入(10)式, 得

$$C = \varepsilon_0 L \frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{L\theta}{d_1} \right) \quad (11)$$

令 $C' = \ln \left(1 + \frac{L\theta}{d_1} \right)$ 将其按级数展开, 得

$$C' = \ln \left(1 + \frac{L\theta}{d_1} \right) = \frac{L}{d_1} \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{d_1} \right)^2 \theta^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{d_1} \right)^3 \theta^3 + \Lambda \quad (12)$$

将式(12)代入式(11), 得

$$C = \varepsilon_0 \frac{L}{\theta} \left[\frac{L\theta}{d_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{L\theta}{d_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{L\theta}{d_1} \right)^3 + \Lambda \right] = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d_1} - \varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{L^3}{d_1^2} \theta + \varepsilon_0 \frac{1}{3} \frac{L^4 \theta^2}{d_1^3} + \Lambda \quad (13)$$

$$\varepsilon_0 \frac{L^2}{d_1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{L\theta}{d_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{L\theta}{d_1} \right)^2 + \Lambda \right]$$

由式(13)知, 只有当 $L\theta \ll d_1$, 才可略去式(13)的第二项及更高次项, 从而得到

$$C = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d_1} \quad (14)$$

这种情况下, 式(14)与式(1)表达的意义一致, 能较准确计算电容. 而当 L 与 d_1 相当, 应该用式(13)才能精确地计算电容, 此时若仍用式(14)计算电容, 得出的结果将比实际值大.

3 结语

在电路设计等实际应用中, 既要了解电容器的构造, 又要充分考虑非理想边缘可能带来的不良影响并设法消除. 值得注意的是, 许多电容器的电容标称值是按具有理想边缘的电容器电容公式算出的, 有可能与实际值相差甚远. 因此, 如果发现选用的某类电容器具有较明显的边缘效应, 且该效应又无法消除, 则应选用容量标称值比实际需要值大一些的电容器; 但若选用的某类电容器, 如第3节所讨论的“平行板电容器两极板不严格平行”情况, 则应选用容量标称值比实际需要值略小一些的电容器. 另外, 电容器在远未达到击穿电压的情况下被击穿, 应疑是边缘效应所致.

参考文献:

- [1] 赵凯华. 电磁学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
- [2] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [3] 游荣义. 平行矩形板电容器的电场和电容[J]. 大学物理, 1993, (12): 2-9.
- [4] 赵凯华. 定性半定量物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

Analysis on Capacitance of Capacitors with Non-ideal Edges

QIU Wan-yang

(School of Natural Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A capacitor is one of the most widely used electronic elements. Difference between the nominal value and the actual value of a capacitor occurs due to edge effect, which may cause unexpected breakdowns of the capacitors. Two kinds of rectangular parallel-plate capacitors with non-ideal edges are analyzed in the paper. The semi-quantitative capacitances in capacitors with non-ideal edges are determined. The paper calculates the quantitative capacitances in plate capacitors which are not strictly paralleled. Some noticeable relevant issues in practical applications are proposed.

Key words: capacitor with nonideal edges; rectangular parallel-plate capacitor; edge effect; semi-quantitative capacitance; quantitative capacitance

(责任编辑: 周尚超)