

模糊正规拓扑空间的两个特征性质

蒋志勇

(华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 利用关于模糊连续映射^[2]的概念以及模糊集的若干分离性^[2]的概念给出了模糊正规拓扑空间的两个特征性质, 所得出的结论是经典正规拓扑空间相应特征性质的推广, 同时也是对有关模糊分离公理体系的进一步完善和发展.

关键词: 模糊正规拓扑空间; 模糊连续函数; 模糊 Urysohn 引理

中图分类号: O159

文献标识码: A

定义1 (1) 设 $A, B \in [0, 1]^X$ (X 是分明集合), 记 $A \vee B$ 表示 A 和 B 的对偶交, 其定义如下:

$A \vee B = \{p \mid p \in A, p^* \in B, p \in P_0\}$ (p^* 为 p 的对偶点), 其中 $P_0 = \{p_x^\alpha \mid x \in X, \alpha \in [0, 1]\}$

(2) 设 $A, B \in [0, 1]^X$, 记 $A \wedge B$ 表示 A 和 B 的强对偶交, 其定义如下:

$A \wedge B = \{p \mid p \in A, p \in B, p \in P_0\}$

定义2 设 $A, B \in [0, 1]^X$, N_A, N_B 分别表示 A, B 的模糊邻域系, 称 A 和 B 是

(1) 分离的: 若 $\exists U \in N_A$ 及 $V \in N_B$, 使得 $U \wedge B = \emptyset$ 及 $V \wedge A = \emptyset$;

(2) 强分离的: 若 $\overline{A} \wedge \overline{B} = \emptyset$ ($\overline{A}, \overline{B}$ 分别表示 A, B 的模糊闭包);

(3) 不连的: 若 $\exists U \in N_A$ 及 $V \in N_B$, 使得 $U \wedge V = \emptyset$.

定义3 设 $(X, \mathcal{T})$ 是模糊拓扑空间, 若任意两个模糊闭集 A, B 是强分离且不连的, 则称 $(X, \mathcal{T})$ 是模糊正规拓扑空间.

定义4 设 $(X, \mathcal{T})$ 是模糊拓扑空间, 若函数 $f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 满足:

(1) 对 $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, 当 $\alpha < \beta$ 时, 有 $f(P_x^\alpha) \leq f(P_x^\beta)$;

(2) 对于 $\forall a, b \in [0, 1]$, 当 $0 \leq a < b \leq 1$ 时, 模糊集 $A = \cup \{P_x^\alpha \mid f(P_x^\alpha) \leq a\}$ 是模糊闭集, 模糊集 $B = \cup \{P_x^\alpha \mid f(P_x^\alpha) < b\}$ 是模糊开集, 且 $B \in N_A$, 则称 f 是关于模糊连续函数.

定义5 设 $(X, \mathcal{T})$ 是模糊拓扑空间, $A, B \in [0, 1]^X$, 且 $A \wedge B = \emptyset$, 若函数 $f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 满足:

(1) f 是关于模糊连续函数;

(2) 当 $P_x^\alpha \in A$ 时 $f(P_x^\alpha) = 0$; 当 $P_y^\beta \in B$ 时 $f(P_y^{1-\beta}) = 1$;

则称 f 是关于模糊集 A 和 B 的 Urysohn 函数.

定义6 (1) 称模糊拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 中的模糊集 A 为模糊开 F_σ 集, 若存在一族模糊闭集 F_i ($i = 1, 2, \dots$), 使得 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 且 $A' \wedge F_i = \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots$), 此处的 A' 是 A 的模糊余集;

(2) 称模糊拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 中的 F -集 A 为模糊闭 G_δ 集, 若 A' 为模糊开 F_σ 集.

注记: 此处的定义6是对经典拓扑中的开 F_σ 集和闭 G_δ 集^[1]概念的推广.

定理1 设 $(X, \mathcal{T})$ 为模糊正规拓扑空间, $A \in [0, 1]^X$ 为模糊闭 G_δ 集 $\Leftrightarrow$

$\exists f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 是关于模糊连续的函数且 $A = f^{-1}(0)$.

收稿日期: 2008-04-20

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目(051106)

作者简介: 蒋志勇(1966-), 男, 江西南昌人, 副教授, 理学硕士.

证明 “ $\Leftarrow$ ” 由于 $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ 为闭 G_δ 集, 又由于 $f: P_0 \rightarrow [0, 1]$ 是关于模糊连续的函数且 $A = f^{-1}$

(0) 则 $A \in [0, 1]^X$ 为模糊闭 G_δ 集.

“ $\Rightarrow$ ” 设 $A \in [0, 1]^X$ 为模糊闭 G_δ 集, 则 A' 为模糊开 F_δ 集, 由定义 6 知: 存在一族模糊闭集 $F_i (i=1, 2, \dots)$, 使得 $A' = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 且 $A \bigcap F_i = \emptyset (i=1, 2, \dots)$. 根据模糊 Urysohn 引理, 对任意 $i \in \{1, 2, \dots\}$, 存在关于模糊连续的函数 $f_i: P_0 \rightarrow [0, 1]$, 使得当 $P_x^\alpha \in A$ 时 $f_i(P_x^\alpha) = 0$, 而当 $P_y^\beta \in F_i$ 时 $f_i(P_y^{1-\beta}) = 1$.

构造函数 $f: P_0 \rightarrow [0, 1], P_x^\alpha \mapsto f(P_x^\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(P_x^\alpha)$. $P_x^\alpha \in P_0$, 则 f 是关于模糊连续的函数, 且当 $P_x^\alpha \in A$ 时 $f(P_x^\alpha) = 0$, 而当 $P_x^\alpha \in A'$ 时, 存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots\}$, 使得 $P_x^\alpha \in F_{i_0}$, 此时有: $f(P_x^{1-\alpha}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(P_x^{1-\alpha}) \geq \frac{1}{2^{i_0}} > 0$. 综上有 $A = f^{-1}(0)$.

定理 2 设 $(X, \mathcal{T})$ 为模糊拓扑空间, 对 $\forall C \in [0, 1]^X$ 模糊闭集及 $\forall G \in [0, 1]^X$ 为模糊开集, 且 $C \subset G$, 存在开集簇 $G_i \in [0, 1]^X (i=1, 2, \dots)$ 满足: $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ 且 $\overline{G_i} \subset C (i=1, 2, \dots)$, 则 $(X, \mathcal{T})$ 为模糊正规拓扑空间.

证明 对于 $\forall A, B \in [0, 1]^X$ 为模糊闭集, 若 $A \bigcap B = \emptyset$, 由于 $A \subset B'$ 为模糊开集, 根据假设知: 存在模糊开集簇 G_i , 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, \overline{G_i} \subset B' (i=1, 2, \dots)$. 同理有, 存在模糊开集簇 H_i , 使得 $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i, \overline{H_i} \subset A' (i=1, 2, \dots)$. 记

$$U_i = G_i \cap (\bigcup_{j \leq i} \overline{H_j})', V_i = H_i \cap (\bigcup_{j \leq i} \overline{G_j})' (i=1, 2, \dots).$$

由于 $A \subset (\bigcup_{j \leq i} \overline{H_j})'$ 及 $B \subset (\bigcup_{j \leq i} \overline{G_j})'$, 所以取 $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, 就有 $A \subset U, B \subset V$ 且由于 $U_i, V_i (i=1, 2, \dots)$ 均为模糊开集, 则 U, V 也为模糊开集, 从而 $U \in N_A, V \in N_B$.

下证: U 和 V 的强对偶交为空.

事实上, 若点 $P \in U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 则存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots\}, P \in U_{i_0}$ 且对任意的 $j \leq i_0, P \in \overline{H_j}'$, 从而 P 的对偶点 $P^* \notin \overline{H_j}, P^* \in H_j$.

因此 $U_{i_0} \bigcap H_j = \emptyset$, 从而 $U_{i_0} \bigcap V_j = \emptyset (j \leq i_0)$,

同理, 若 $P \in V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, 则 $V_{j_0} \bigcap U_i = \emptyset (i \leq j_0, \text{其中 } j_0 \in \{1, 2, \dots\})$,

即 $U \bigcap V = \emptyset$, 故 A, B 是不连的.

综上 $(X, \mathcal{T})$ 为模糊正规拓扑空间.

参考文献:

- [1] J. L. Kelley, General Topology [M]. New York: Van Nostrand, 1955.
- [2] Hu Cheng Ming, Fuzzy Topological Spaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 1985, 110(1): 141-178.
- [3] B. Hutton, Normality in Fuzzy Topological Spaces [M]. 北京: 科学出版社, 1975.

Two Characteristic Properties of Normality in Fuzzy Topological Space

JIANG Zhi-yong

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we use the concepts of fuzzy continuity function and fuzzy separation to introduce the two characteristic properties of fuzzy normal topology space. The conclusion is we should generalize of corresponding properties of topic normal topology space, and develop fuzzy separation axiom systems.

Key words: fuzzy normal topological space; fuzzy continuity function; fuzzy Urysohn lemma

(责任编辑: 周尚超)