

投资收益下的两类双负二项风险模型的破产概率

刘东海¹ 彭 丹¹ 刘再明²

(1. 湖南科技大学 数学与计算科学学院 湖南 湘潭 411201; 2. 中南大学 数学科学与计算技术学院 湖南 长沙 410075)

摘要: 在单位时间内保费收取次数和理赔次数均服从负二项分布的基础上, 讨论了投资收益率为常数和投资收益率为一随机序列的两类双负二项风险模型. 运用鞅论的方法给出了关于它们破产概率的一个定理, 并推导出了相应风险模型的破产概率的上界, 为保险公司的运营提供了决策依据.

关键词: 风险模型; 破产概率; 投资收益

中图分类号: O211.62

文献标识码: A

保险公司在经营运作中, 一方面, 它拥有庞大的资金及各种责任准备金, 这形成了巨额的运用资金. 另一方面, 为保护有关各方特别是被保险人的利益, 必须合理有效地进行资金运用. 考虑投资因素的风险模型具有很大的实用价值. 文献[1]中考虑了保费收取次数和索赔到达服从负二项分布的双负二项风险模型, 未考虑保险公司的投资收入. 但在实际情况中, 保险公司会用一部分资金进行投资.

本文从实际情况出发, 给出了保险公司在每阶段进行投资, 投资收益率为常数和投资收益率为一随机序列的两类双负二项风险模型, 得出了上述两类风险模型的破产概率表达式.

1 模型的引入

在文献[1]中给出的双负二项模型为 $X(n) = u + S(n)$, $S(n) = cM(n) - Z(n)$.

本文考虑的含投资因素的双负二项风险模型如下:

$$\begin{aligned} X_1(n) &= u + S_1(n), \quad S_1(n) = f \cdot i \cdot n + cM(n) - Z(n) \\ X_2(n) &= u + S_2(n), \quad S_2(n) = f \cdot r(n) + cM(n) - Z(n) \end{aligned}$$

其中 $r(n) = \sum_{k=1}^n I_k$, $Z(n) = \sum_{i=1}^{N(n)} Y_i$. $X_1(n)$ 为投资收益率为常数 i 的情形, $X_2(n)$ 为投资收益率为随机序列的情形.

设 $u > 0$, $c > 0$, $i > 0$, μ 为保险公司初始资本, c 为每次保费收入. 以下随机变量都定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上.

(1) 索赔额序列 $\{Y_i, i=1, 2, 3, \dots\}$ 是取值于 $(0, +\infty)$ 的独立同分布随机变量序列, 只涉及分布 Y_i 时用 Y 表示. 假定 $E[Y] = \mu$, $\text{Var}[Y] = \delta^2$.

(2) $M(n)$ 为到时刻 n 为止的保单到达数, 服从参数 (n, p) 的负二项分布, 即

$$P(M(n) = k) = C_{n+k-1}^k p^n q^k, \text{ 其中 } p+q=1.$$

(3) $N(n)$ 为到时刻 n 为止的索赔总次数, 服从参数 $(n, \bar{p})$ 的负二项分布, 即

$$P(N(n) = k) = C_{n+k-1}^k \bar{p}^n \bar{q}^k, \text{ 其中 } \bar{p} + \bar{q} = 1$$

收稿日期: 2008-06-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771216); 湖南省自然科学基金资助项目(06JJ20019); 湖南科技大学基金资助项目(E50833).

作者简介: 刘东海(1980-), 男, 湖南湘潭人, 硕士; 研究方向为随机过程与金融风险.

(4) f 为用于投资的基金,它是根据初始资本金的大小,单位时间内的保费收入及预测的赔付额大小而设定的.

(5) i 为预期投资收益率; I_n 为第 n 次的投资收益率.

(6) $\{I_n, n=1, 2, 3, \dots\}$ 为取值在 $(-\infty, +\infty)$ 上的独立同分布随机序列,记为 I . 假定

$$E[I] = \eta, \text{Var}[I] = \delta_1^2$$

(7) $\{X_j(n), n=1, 2, 3, \dots\} (j=1, 2)$ 为期末保险公司的盈余

假定 $\{Y_i, i=1, 2, 3, \dots\}, \{M(n), n=1, 2, 3, \dots\}, \{N(n), n=1, 2, 3, \dots\}, \{I_n, n=1, 2, 3, \dots\}$ 相互独立. 为保证公司的稳定经营,假定单位时间内平均收益大于平均理赔额,即对应

$$\{X_j(n), n=1, 2, 3, \dots\} (j=1, 2) \text{ 分别有 } \frac{cq}{p} + f\bar{i} > \frac{\mu\bar{q}}{p}, \frac{cq}{p} + f\eta > \frac{\mu\bar{q}}{p}$$

由此定义安全系数 $\rho_1 = \frac{cq\bar{p} - p\bar{p}f - \mu p\bar{q}}{\mu p\bar{q}}, \rho_2 = \frac{cq\bar{p} + p\bar{p}f\eta - \mu p\bar{q}}{\mu p\bar{q}}$. ρ_1, ρ_2 分别为 $X_1(n), X_2(n)$ 的安全系数.

定义破产时刻 $T_j = \inf\{n \geq 1, X_j(n) < 0\} (j=1, 2)$. 最终破产概率 $\Psi_j(u) = P\{T_j < \infty | X_j(0) = u\} (j=1, 2)$. 不失一般性,假定存在 $r > 0, M_Y(r) = E[e^{rY}]$ 矩母函数存在区间为 $(-\infty, Z)$.

2 破产概率

定理 2.1 关于未知量 r 的方程: $\frac{p}{1 - qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1 - \bar{q}M_Y(r)e^{-r \cdot f \cdot i}} = 1$ (2.1)

$$\frac{p}{1 - qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1 - \bar{q}M_Y(r)} Ee^{-r \cdot f \cdot I} = 1 \quad (2.2)$$

它们都有唯一的正解.

证明 (2.1) (2.2) 的证明类似,只对 (2.2) 给出证明.

令 $g(r) = \frac{p}{1 - qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1 - \bar{q}M_Y(r)} Ee^{-r \cdot f \cdot I}$, 显然 $g(0) = 1$, 又因为 $g(0) = \frac{\mu\bar{q}}{p} - \frac{cq}{p} - f\eta < 0$.

可知对充分小的 $\Delta r \in (0, Z)$, 有 $g(r) < 1$. 当 $r \rightarrow Z$ 时 $g(r) \rightarrow \infty$,

故必存在 $r^* \in (0, Z)$, 使得 $g(r^*) = 1$.

易知 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $r \in (r^* - \varepsilon, r^*)$ 时 $g(r) < 1$; 当 $r \in (r^*, r^* + \varepsilon)$ 时 $g(r) > 1$.

故 $g(r) = 1$ 有唯一正解.

定义 2.2 称方程 (2.1) (2.2) 的唯一正解 R_1, R_2 为相应的双负二项风险模型 $\{X_j(n), n=1, 2, 3, \dots\} (j=1, 2)$ 的调节系数.

定理 2.3 对 $u > 0, R_1, R_2$ 为前述定义的调节系数, 则有

(1) 当 $cq\bar{p} + p\bar{p}f\bar{i} > \mu p\bar{q}$ 时, $\Psi_1(u) = \frac{e^{-R_1 u}}{E[e^{-R_1 X_1(T_1)} | T_1 < \infty]}$. 特别地 $\Psi_1(u) \leq e^{-R_1 u}$.

(2) 当 $cq\bar{p} + p\bar{p}f\eta > \mu p\bar{q}$ 时, $\Psi_2(u) = \frac{e^{-R_2 u}}{E[e^{-R_2 X_2(T_2)} | T_2 < \infty]}$. 特别地 $\Psi_2(u) \leq e^{-R_2 u}$.

证明 (1) (2) 的证明情况类似, 只证 (2).

对 $n \geq 1$ 和 $r > 0$ 我们考察

$$E[e^{-rX_2(n)}] = E[e^{-rX_2(n)} | T_2 < n] \cdot P(T_2 < n) + E[e^{-rX_2(n)} | T_2 \geq n] \cdot P(T_2 \geq n) \quad (2.3)$$

因为 $X_2(n) = u + cM(n) + f \cdot r(n) - Z(n)$

故 (2.3) 式左端可写为 $E[e^{-rX_2(n)}] = e^{-ru} \cdot E[e^{-rcM(n)}] \cdot E[\exp(-rf \sum_{k=1}^n I_k)] \cdot E[\exp(r \sum_{i=1}^{N(n)} Y_i)]$

$$e^{-ru} \cdot \left[\frac{p}{1 - qe^{-rc}} \right]^n \cdot \left[\frac{\bar{p}}{1 - \bar{q}M_Y(r)} \right]^n \cdot E[\exp(r \cdot f \sum_{k=1}^n I_k)]$$

对于 (2.3) 式右端第一项中 $X_2(n)$ 可写为

$$X_2(n) = X_2(T_2) + f \sum_{k=T_2}^n I_k + c(M(n) - M(T_2)) - (Z(n) - Z(T_2))$$

又对于给定 $T_2, M(n) - M(T_2), Z(n) - Z(T_2), I_k (k=T_2, \dots, n)$ 与 $X_2(T_2)$ 相互独立.

故 $E[e^{-rX_2(n)} | T_2 < n] \cdot P(T_2 < n)$

$$= E[A] \cdot E[B | T_2 < n] \cdot E[D | T_2 < n] \cdot E[e^{-rZ(n) - Z(T_2)} | T_2 < n] \cdot P(T_2 < n) \\ = E[A] \cdot P(T_2 < n) \left[\frac{P}{1 - qe^{-rc}} \cdot \frac{\bar{p}}{1 - \bar{q}M_Y(r)} \right]^{n-T_2} \cdot E[B]$$

上式中 $A = \exp(-rX_2(T_2) | T_2 < n)$, $B = \exp(-r \cdot f \sum_{k=T_2}^n I_k)$, $D = e^{-rc(M(n) - MT_2)}$

选择 $r = R_2$, 则 (2.3) 式可变为

$$e^{-R_2 u} = E[e^{-R_2 X_2(T_2)} | T_2 < n] \cdot P(T_2 < n) \cdot E[e^{-R_2 X_2(n)} | T_2 \geq n] \cdot P(T_2 \geq n) \quad (2.4)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则上式右端第一项变为 $E[e^{-R_2 X_2(T_2)} | T_2 < \infty] \cdot P(T_2 < \infty)$

若能证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, 右端第二项为零, 则定理得证, 以下证明这点.

设 $\alpha = cq\bar{p} + p\bar{p}f\eta - \mu p\bar{q}$, $\beta^2 = f^2\delta_1^2 + \frac{c^2q}{p^2} + \frac{\bar{q}}{p}\delta^2 + \frac{\bar{q}}{p^2}\mu^2$, 则 $\text{Var}[X_2(n)] = n\beta^2$.

由 $\alpha > 0$, 考察 $\Delta = u + n\alpha - \beta n^{2/3}$, 只要 n 充分大, 它就是正的.

利用 $X_2(n)$ 和 Δ 的大小关系, 将 (2.4) 式右端第二项拆为两项有

$$E[e^{-R_2 X_2(n)} | T_2 \geq n] P(T_2 \geq n) = E[e^{-R_2 X_2(n)} | T_2 \geq n, 0 \leq X_2(n) \leq \Delta] \cdot P(T_2 \geq n, 0 \leq X_2(n) \leq \Delta) \\ + E[e^{-R_2 X_2(n)} | T_2 \geq n, X_2(n) > \Delta] \cdot P(T_2 \geq n, X_2(n) > \Delta) \leq P(0 < X_2(n) \leq \Delta) + e^{-R_2 \Delta} \quad (2.5)$$

由契比雪夫不等式 $P(0 < X_2(n) \leq \Delta) \leq \text{Var}[X_2(n)] / (\beta^2 n^{4/3}) = n^{-1/3}$,

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, (2.5) 右端将为零.

故在 (2.4) 式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 有 $e^{-R_2 u} = E[e^{-R_2 X_2(T_2)} | T_2 < \infty]$

即 $\Psi_2(u) = \frac{e^{-R_2 u}}{E[e^{-R_2 X_2(T_2)} | T_2 < \infty]}$, 又因为 $X_2(T_2) < 0$, 故 $E[e^{-R_2 X_2(T_2)} | T_2 < \infty] > 1$.

可得 $\Psi_2(u) \leq e^{-R_2 u}$, 定理得证.

参考文献:

- [1] 彭丹, 刘东海, 刘再明. 双负二项风险模型的破产概率[J]. 华东交通大学学报, 2007, 24(4): 141-143.
- [2] 龚日朝. 广义复合二项风险模型下的生存概率[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001, 22(2): 17-21.
- [3] 高明美, 赵明清, 王建新. 双二项风险模型下的破产概率[J]. 经济数学, 2004, 21(1): 6-9.
- [4] 刘东海, 刘再明. 双险种二项风险模型的破产概率[J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(5): 162-164.
- [5] 孙立娟, 顾岚. 离散时间保险风险模型的破产问题[J]. 应用概率统计, 2002, 18(3): 293-299.

Ruin Probabilities and Comparison for Two Different Double Negative Binomial Model with Investment

LIU Dong-hai, PENG Dan, LIU Zai-ming

(1. Department of Mathematics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 4112011, China; 2. Department of Mathematics and computer science, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Based on the fact that the number of premiums and claims is subject to negative binomial distribution in the unit time, the paper discusses the double negative binomial model for two different risk processes with investment, which include one with constant investment rate, the other with a random sequence investment rate. We obtain a theorem with their ruin probabilities and obtain its upper bound by using martingale method. The conclusion provide the decision-making basis for the operations of insurance companies.

Key words: risk model; ruin probability; investment yield

(责任编辑: 周尚超)