

第二类 stirling 数 $S_2(n, n-6)$ 的一个公式

吴跃生

(华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 运用组合理论对第二类 stirling 数开展了分析. 第二类 stirling 数 $S_2(n, n-6)$ 表示把含有 n 个元素的一个集合分成恰好有 $n-6$ 个非空子集合的分拆数目. 根据第二类 stirling 数 $S_2(n, n-6)$ 的定义, 利用组合数的计算公式, 给出当 $n \geq 12$ 时的第二类 stirling 数 $S_2(n, n-6)$ 的一个公式.

关键词: 非空子集合; 组合; 第二类 stirling 数

中图分类号: O157

文献标识码: A

在我们表述的主要结果之前, 首先给出一些定义和符号.

定义 1 从 n 个不同事物中每次取出 m 个的组合数, 记作 $C(n, m)$.

定义 2 把含有 n 个元素的一个集合分成恰好有 r 个非空子集合的分拆数目就叫做第二类 stirling 数, 并记作 $S_2(n, r)$. 对于 $n=r=0$, 我们定义 $S_2(0, 0)=1$ 及 $n < r$ 时 $S_2(n, r)=0$.

对于集合 x , 我们用 $|x|$ 表示 x 的基数.

引理 1 当 $n \geq 1$ 时 $S_2(n, 0)=0$, $S_2(n, 1)=1$, $S_2(n, 2)=2^{n-1}-1$, $S_2(n, n-1)=S_2(n, 2)$, $S_2(n, n)=1$.

引理 2 当 $n \geq 4$ 时 $S_2(n, n-2)=C(n, 3)+3C(n, 4)$, 当 $n \geq 6$ 时 $S_2(n, n-3)=C(n, 4)+10C(n, 5)+15C(n, 6)$.

引理 1 及引理 2 的证明在 [1] 里可以找到, 文 [2], 文 [3] 的主要结论是:

当 $n \geq 8$ 时 $S_2(n, n-4)=C(n, 5)+25C(n, 6)+105C(n, 7)+105C(n, 8)$

当 $n \geq 10$ 时,

$$S_2(n, n-5)=C(n, 6)+56C(n, 7)+490C(n, 8)+1260C(n, 9)+945C(n, 10)$$

我们的主要结论是:

定理 1 当 $n \geq 12$ 时,

$$S_2(n, n-6)=C(n, 7)+119C(n, 8)+1918C(n, 9)+9450C(n, 10)+17325C(n, 11)+10395C(n, 12)$$

证明 设 A 是含有 n 个元素的集合, 当 $n \geq 12$ 时, 按照 $S_2(n, n-6)$ 的定义, 我们有下面 6 种不同情况分拆方法.

(1) $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} A_i$ 这里 $A_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: (1) $A_i \cap A_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6)$; (2) $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_{n-7}| = 1$, 且 $|A_{n-6}| = 7$. 我们从 A 中取出 A_{n-6} 的方法为 $C(n, 7)$ 个分拆数.

(2) $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} B_i$ 这里 $B_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: (1) $B_i \cap B_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6)$; (2) $|B_1| = |B_2| = \cdots =$

收稿日期: 2008-03-14

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目(2007GZS0715)

作者简介: 吴跃生(1959-) 男, 江西瑞金人, 副教授, 硕士.

$|B_{n-8}| = 1, |B_{n-7}| \geq 2, |B_{n-6}| \geq 2$ 并且 $|B_{n-6} \cup B_{n-7}| = 8$. 我们从 A 中取出 8 个元素的方法有 $C(n, 8)$ 种, 而 8 个元素分成两部分的拆分数为, 并且每一部分至少有一个元素. 将 8 个元素分成两部分, 一部分有 1 个元素而另一部分有 7 个元素, 共有 $C(8, 1)$ 种方法, 因此, 将 8 个元素分成两部分, 使每部分至少有 2 个元素的方法共有 $S_2(8, 2) - C(8, 1) = 2^{8-1} - 1 - 8 = 119$ 种. 因此在 2) 中, 我们有分拆数 $119C(n, 7)$.

(3) $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} C_i$ 这里 $C_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: $C_i \cap C_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6); |C_1| = |C_2| = \dots = |C_{n-9}| = 1, |C_{n-8}| \geq 2, |C_{n-7}| \geq 2, |C_{n-6}| \geq 2$ 并且 $|C_{n-8} \cup C_{n-7} \cup C_{n-6}| = 9$. 我们从 A 中取出 9 个元素的方法有 $C(n, 9)$ 种, 将 9 个元素分成 3 部分, 使每部分至少有 2 个元素有三种方法: (1) 先从 9 个元素中任取 5 个元素, 取法为 $C(9, 5)$, 把其余的 4 个元素分成两部分, 使每部分都有 2 个元素的分拆数为 3, 因此将 9 个元素按此种方法分成 3 部分, 使每部分至少有 2 个元素的分法有 $3 * C(9, 5) = 3 \times 126 = 378$ 种; (2) 先从 9 个元素中任取 4 个元素, 取法为 126, 把其余的 5 个元素分成两部分, 使一部分都有 3 个元素另一部分都有 2 个元素的分拆数为 $C(5, 3) C(2, 2) = 10$, 因此将 9 个元素按此种方法分成 3 部分, 使每部分至少有 2 个元素的分法有 $126 \times 10 = 1260$ 种; (3) 将 9 个元素分成 3 部分, 使每部分都有 3 个元素的分法有 $C(9, 3) C(6, 3) C(3, 3) / 3! = 280$. 故在 3) 中, 我们有分拆数 $1918C(n, 9)$ 种.

(4) $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} D_i$ 这里 $D_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: (1) $(D_i \cap D_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6)); (2) |D_1| = |D_2| = \dots = |D_{n-10}| = 1, |D_{n-9}| \geq 2, |D_{n-8}| \geq 2, |D_{n-7}| \geq 2, |D_{n-6}| \geq 2$ 并且 $|D_{n-9} \cup D_{n-8} \cup D_{n-7} \cup D_{n-6}| = 10$. 我们从 A 中取出 10 个元素的方法有 $C(n, 10)$ 种, 将 10 个元素分成 4 部分, 使每部分至少有 2 个元素有二种方法: 第一种先从 10 个元素中任取 4 个元素, 取法为 $C(10, 4) = 210$, 把其余的 6 个元素分成三部分, 使每部分都有 2 个元素的分拆数为 $C(6, 2) C(4, 2) C(2, 2) / 3! = 15$, 因此将 10 个元素按此种方法分成 4 部分, 使每部分至少有 2 个元素的分法有 $210 \times 15 = 3150$ 种; 第二种先从 10 个元素中任取 4 个元素, 取法为 $C(10, 4)$. 将这 4 个元素分成两部分, 使每部分都有 2 个元素的分法有 $C(4, 2) C(2, 2) / 2! = 3$ 种, 再将其余的 6 个元素分成两部分, 使每部分都有 3 个元素的分拆数为 $C(6, 3) C(3, 3) / 2! = 10$, 因此将 10 个元素按此种方法分成 4 部分, 使每部分至少有 2 个元素的分法有 $210 \times 3 \times 10 = 6300$; 故在 4) 中, 我们有分拆数 $9450C(n, 10)$ 种.

(5) $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} E_i$ 这里 $E_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: (1) $E_i \cap E_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6); (2) |E_1| = |E_2| = \dots = |E_{n-11}| = 1, |E_{n-10}| \geq 2, |E_{n-9}| \geq 2, |E_{n-8}| \geq 2, |E_{n-7}| \geq 2, |E_{n-6}| \geq 2$ 并且 $|E_{n-10} \cup E_{n-9} \cup E_{n-8} \cup E_{n-7} \cup E_{n-6}| = 11$. 从 A 中任取 11 个元素的方法共有 $C(n, 11)$ 种, 而将 11 个元素分成 5 部分, 使每部分至少都有 2 个元素的分法有 $C(11, 3) C(8, 2) C(6, 2) C(4, 2) C(2, 2) / 4! = 17325$ 种. 因此, 在 5) 中, 我们有分拆数 $17325C(n, 10)$ 种.

(6) $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} F_i$ 这里 $F_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: (1) $F_i \cap F_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6); (2) |F_1| = |F_2| = \dots = |F_{n-12}| = 1, |F_{n-11}| \geq 2, |F_{n-10}| \geq 2, |F_{n-9}| \geq 2, |F_{n-8}| \geq 2, |F_{n-7}| \geq 2, |F_{n-6}| \geq 2$ 并且 $|F_{n-11} \cup F_{n-10} \cup F_{n-9} \cup F_{n-8} \cup F_{n-7} \cup F_{n-6}| = 12$. 由 (1) 和 (2), 我们知道 $|F_{n-11}| = |F_{n-10}| = |F_{n-9}| = |F_{n-8}| = |F_{n-7}| = |F_{n-6}| = 2$, 从 A 中任取 12 个元素的方法共有 $C(n, 12)$ 种, 而将 12 个元素分成 6 部分, 使部分都有 2 个元素的分法有 $C(12, 2) C(10, 2) C(8, 2) C(6, 2) C(4, 2) C(2, 2) / 6! = 10395$ 种. 因此, 在 6) 中, 我们有分拆数 $10395C(n, 12)$ 种.

假设 $A = \bigcup_{i=1}^{n-6} G_i$ 这里 $G_i (1 \leq i \leq n-6)$ 满足: (1) $G_i \cap G_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n-6); (2) |G_1| = |G_2| = \dots = |G_{n-k}| = 1, |G_{n-k+1}| \geq 2, |G_{n-k+2}| \geq 2, \dots, |G_{n-6}| \geq 2$ 且 $\bigcup_{i=n-k+1}^{n-6} G_i = k$.

我们有 $n-k+2[n-6-(n-k)] > n$ 或 $6 < k \leq 12$. 因此, 只有以上 6 种情况存在, 故根据加法原则将 A 分成 $n-6$ 个部分的分拆数为

$$C(n, 7) + 119C(n, 8) + 1918C(n, 9) + 9450C(n, 10) + 17325C(n, 11) + 10395C(n, 12)$$

$$\text{因此} \quad S_2(n, n-6) = C(n, 7) + 119C(n, 8) + 1918C(n, 9) + 9450C(n, 10) + 17325C(n, 11) + 10395C(n, 12)$$

故定理 1 得证.

参考文献:

- [1] 陈景润. 组合数学简介 [M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1988. 121 – 126.
 [2] 杜春雨. 第二类 stirling 数的一个恒等式 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版) 2004 28(5): 240 – 241.
 [3] 吴跃生. 第二类 stirling 数的又一个恒等式 [J]. 华东交通大学学报 2007 25(2): 146 – 147.

A Formula of $S_2(n, n-6)$ of the Second Kind Stirling Numbers

WU Yue – sheng

(School of Basic Science ,East China Jiaotong University ,Nanchang 330013 ,China)

Abstract: According to stirling number definition ,we determine the stirling number of the second kind $S_2(n, n-6)$,when $n \geq 12$ by combination number formula.

Key words: non – empty subset; combinations; stirling numbers of the second kind

(责任编辑: 周尚超)

(上接第 84 页)

Preparation and Photoluminescent Properties of Phosphors

$\text{Na}_3\text{La}_9\text{B}_8\text{O}_{27} : \text{Ln}^{3+}$ (Ln = Eu or Tb)

ZHANG Lu – ning ,LI Zhi – hua

(Department of Chemistry and Material Science ,Shandong Normal University ,Jinan 250014 ,China)

Abstract: $\text{Na}_3\text{La}_9\text{B}_8\text{O}_{27} : \text{Ln}^{3+}$ (Ln = Eu or Tb) phosphors have been prepared by solid state reaction ,sol – gel process technique and fluxes technique ,respectively. The optimal initial ratios have been determined in the solid state reaction process. The excitation and emission spectra of $\text{Na}_3\text{La}_9\text{B}_8\text{O}_{27} : \text{Eu}^{3+}$ and $\text{Na}_3\text{La}_9\text{B}_8\text{O}_{27} : \text{Tb}^{3+}$ are measured and explained. The different photoluminescent efficiency of the various prepared phosphors is studied and discussed. The phosphors fabricated by fluxes technique have the most luminescent efficiency.

Key words: $\text{Na}_3\text{La}_9\text{B}_8\text{O}_{27} : \text{Ln}^{3+}$ (Ln = Eu or Tb) ; solid state reaction; sol – gel method; fluxes

(责任编辑: 刘棉玲)