超星·期刊

第 25 卷第 4 期　　华 东 交 通 大 学 学 报　　Vol. 25　No. 4
2008 年 8 月　　Journal of East China Jiaotong University　　Aug. ,2008

文章编号: 1005 - 0523(2008)04 - 0100 - 03

图的符号 k - 控制

袁秀华

(南京林业大学 数学系,江苏 南京 210037)

摘要: 设 $G(V,E)$ 为一个图,k 为任意的正整数且 k 不超过 $|G|$,若有一个函数 $f: V\{1,-1\}$ 满足:V 中至少有 k 个点满足 $f[v] \geq 1$,则称 f 为图 G 的一个符号 k - 控制函数,图 G 的符号 k - 控制数定义为 $\gamma_{ks}^{-11}(G) = \min\{f(V) | f$ 为图 G 的一个符号 k - 控制$\}$. 给出了图的符号 k - 控制数的下界的一个改进的结论,并确定了轮图的符号 k - 控制数.

关　键　词: 符号 k - 控制函数; 符号 k - 控制数; 轮图

中图分类号: O157.5　　　**文献标识码:** A

本文未说明的符号和术语见文献 [1] ~ [3].

设图 $G(V,E)$ 为一个图,其中 V,E 分别为图 G 的顶点集和边集,对任意的点 $v \in V(G)$,$N_G(v)$ 表示点 v 的邻域,$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 表示点 v 的闭邻域,在不引起混淆的情况下简记为 $N(v)$ 及 $N[v]$.

对于一个实值函数 $f: V \to R$ 和一个子集 $S \subseteq V$,$f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$. 对任意的 $v \in V(G)$,$f(N[v])$ 简记为 $f[v]$. 此外,$f(v)$ 为点 v 在 f 下的标号,$|G|$ 为图 G 的阶.

定义[1~3]　设图 $G(V,E)$ 为一个图,k 为任意的整数($1 \leq k \leq |G|$),一个双值函数 $f: V \to \{1,-1\}$ 若满足: V 中至少有 k 个点满足 $f[v] \geq 1$,则称 f 为图 G 的一个符号 k - 控制函数,图 G 的符号 k - 控制数定义为 $\gamma_{ks}^{-11}(G) = \min\{f(V) | f$ 为图 G 的一个符号 k - 控制函数$\}$. 特殊地,当 $k = |G|$ 时,符号 k - 控制函数为符号控制函数,记为 $\gamma_s'(G)$.

对于符号控制函数,目前已经有很多结论. 但对于符号 k - 控制函数,已知的结论相当少. E. H. Cockayne 得到了路,圈,星的符号 k - 控制数,并得到了一些特殊图上的界限. 徐根保老师得到了一般图的符号 k - 控制数的一个下界并确定了完全二部图的符号 k - 控制数[3]. 本文在上述基础上得到了一个改进的下界并确定了轮图的符号 k - 控制数.

1　定理和证明

引理 1[3]　对于任意 n 阶图 $G(|G| \geq 3)$ 和任意的整数($1 \leq k \leq n$),则

(1) 当 $1 \leq k \leq n-2$,$\gamma_{ks}^{-11}(G) > 4 - n$

(2) 当 $k = n-1$,$\gamma_{ks}^{-11}(G) \geq 2\lceil(-1+\sqrt{8n-3})/2\rceil - n$

(3) 当 $k = n$,$\gamma_{ks}^{-11}(G) \geq 2\lceil(-1+\sqrt{4n-3})/2\rceil - n$

定理 1　对于任意 n 阶图 $G(|G| \geq 3)$ 和任意的整数 $k(1 \leq k \leq n)$,δ 为图 G 的最小度,则

(1) 当 $1 \leq k \leq n-2$,$\gamma_{ks}^{-11}(G) > 2\lceil(\delta+3)/2\rceil - n$

收稿日期: 2008 - 06 - 13

作者简介: 袁秀华(1976 -),女,硕士,江苏无锡人,讲师,主要从事图论的研究.

超星·期刊

(2) 当 $k=n-1$, $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge 2\lceil(1-\lceil(\delta+3)/2\rceil+\sqrt{\lceil(\delta+3)/2\rceil^2+(4n-6)\lceil(\delta+3)/2\rceil+5})/2\rceil-n$

(3) 当 $k=n$, $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge 2\lceil(3-\lceil(\delta+3)/2\rceil+\sqrt{((\delta+3)/2)^2+(4n-6)\lceil(\delta+3)/2\rceil+5-4n})/2\rceil-n$

注: 定理的证明类似于文献[3],只需考虑当 $f[v_0]\ge 1$, $N[v_0]$ 中必有 $\lceil(\delta+3)/2\rceil$ 个点满足 $f(v)\ge 1$. 显然,文献[3]中的结论是此结论当 $\delta=1$ 时的特殊情况.

定理 2　设 W_{n+1} 为轮图,k 为任意的整数($1\le k\le n$)

$$\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})=\begin{cases}\lceil(4k-3n+3)/3\rceil, & k=3t(4t/3\ge n)\text{ 或 }k=3t+1((4k+2)/3\ge n)\text{ 或 }k=3t+2\\ \lceil(4k-3n+5)/3\rceil, & k=3t(4k/3<n)\text{ 或 }k=3t+1((4t+2)/3<n)\end{cases}$$

证明　先证明 n 为偶数时的情况形.

设 $W_{n+1}=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,其中 v_0 为中心点 $W_{n+1}=C_n+S_{n+1}$.

下面给出轮图的符号 k – 控制的一个下界.

f 为图 G 的任一个符号 k – 控制函数,且 $\gamma_{ks}^{-11}(G)=\sum_{v\in v(G)}f(v)$.

情况 1　当中心点满足 $f[v_0]\ge 1$ 且 $f(v_0)=1$,

其余满足 $f[v]\ge 1$ 的 $k-1$ 个点在 C_n 上,因 $|N[v]|=4$ 为偶数,故应有 $f[v]\ge 2$,另外的 $n-k+1$ 个点中至少有两个点满足 $f[v]\ge 0$,其余 $n-k-1$ 个点满足 $f[v]\ge -2$. $\sum_{v\in V(C_n)}f[v]=3f(C_n)+nf(v_0)\ge 2(k-1)-2(n-k-1)=4k-2n$,即 $3\gamma_{ks}^{-11}(G)=3f(C_n)+3f(v_0)\ge 4k-2n-(n-3)f(v_0)$,即 $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge(4k-3n+3)/3$.

情况 2　当中心点满足 $f[v_0]\ge 1$ 且 $f(v_0)=-1$,

其余满足 $f[v]\ge 1$ 的 $k-1$ 个点在 C_n 上,因 $|N[v]|=4$ 为偶数,故应有 $f[v]\ge 2$,另外的 $n-k+1$ 个点中至少有两个点满足 $f[v]\ge 0$,其余 $n-k-1$ 个点满足 $f[v]\ge -4$. $\sum_{v\in V(C_n)}f[v]=3f(C_n)+nf(v_0)\ge 2(k-1)-4(n-k-1)=6k-4n+2$,即 $3\gamma_{ks}^{-11}(G)=3f(C_n)+3f(v_0)\ge 6k-4n+2-(n-3)f(v_0)$,即 $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge(6k-3n-1)/3$,即 $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge(6k-3n-1)/3$.

情况 3　当 k 个满足 $f[v]\ge 1$ 的点全在 C_n 上且 $f(v_0)=1$,

因 $|N[v]|=4$ 为偶数,故应有 $f[v]\ge 2$,另外的 $n-k$ 个点中至少有两个点满足 $f[v]\ge 0$,其余 $n-k-2$ 个点满足 $f[v]\ge -2$,

即 $3\gamma_{ks}^{-11}(G)=3f(C_n)+3f(v_0)\ge 4k-2n+4-(n-3)f(v_0)$,即 $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge(4k-3n+7)/3$.

情况 4　当 k 个满足 $f[v]\ge 1$ 的点在 C_n 上且 $f(v_0)\ge -1$,因为 $|N[v]|=4$ 为偶数,故应有 $f[v]\ge 2$,另外的 $n-k$ 个点中至少有两个点满足 $f[v]\ge 0$,其余 $n-k-2$ 个点满足 $f[v]\ge -4$. $\sum_{v\in V(C_n)}f[v]=3f(C_n)+nf(v_0)\ge 2k-4(n-k-2)=4k-4n+8$,即 $3\gamma_{ks}^{-11}(G)=3f(C_n)+3f(v_0)\ge 4k-4n+8-(n-3)f(v_0)$,即 $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge(4k-3n+5)/3$

总之,$\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge\lceil(4k-3n+3)/3\rceil$

当 $k=3t$,$\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge 4t-n+1$

当 $k=3t+1$,$\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge 4t-n+3$

当 $k=3t+2$,$\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge 4t-n+4$,$n$ 为偶数,$\gamma_{ks}^{-11}(G)$ 为奇数,所以 $\gamma_{ks}^{-11}(G)\ge 4t-n+5$.

下面给出一个上界.

$k=3t$ 且 $4k/3\ge n$ 时,设 $f(v_{3i+1})=-1$, $f(v_{3i+2})=f(v_{3i+3})=1$, $(0\le i\le t-1)$, $f(v_{3t+1})=-1$ 其余 $f(v)=-1$,此时 $f(W_{n+1})=t+1-(n-3t)=4t-n+1$.

$k=3t+1$ 且 $(4k+2)/3\ge n$ 时,

设 $f(v_{3i+1})=-1$, $f(v_{3i+2})=f(v_{3i+3})=1(0\le i\le t-1)$, $f(v_{3t+1})=-1$, $f(v_{3i+2})=1$,其余 $f(v)=-1$,此时 $f(W_{n+1})=t+1-(n-3t-2)=4t-n+3$

$k=3t+2$ 时,

设 $f(v_{3i+1})=-1$, $f(v_{3i+2})=f(v_{3i+3})=1(0\le i\le t)$,其余 $f(v)=-1$,此时 $f(W_{n+1})=t+1+1-[n-3(t+1)]=4t-n+5$.

超星·期刊

$k=3t$ 且 $4k/3<h$ 时,由 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq(4k-3n+3)/3$,当取下界时,即为情况 1 时 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})=4k/3-n+1\leq0$,中心点满足 $f[v_0]\geq1$ 且 $f(v_0)=1$,则由 $f[v_0]\geq1$ 知 C_n 上至少有 $n/2$ 个点满足 $f(v)=1$,则 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq1$,矛盾! 故 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq4k/3-n+2$,因当 n 为偶数时,$\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})$ 为奇数,故 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq4k/3-n+3=4t-n+3$.

同理可证 $k=3t+1$ 且 $(4k+2)/3<n$ 时,由 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq\lceil(4k-3n+3)/3\rceil=(4k-3n+5)/3$,当取下界时,有两种可能. 当是情况 1 即 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq(4k-3n+5)/3=(4k+2)/3-n+1\leq0$ 且中心点满足 $f[v_0]\geq1$ 且 $f(v_0)=1$,则由 $f[v_0]\geq1$ 知 C_n 上至少有 $n/2$ 个点满足 $f(v)=1$,则 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq1$,矛盾! 当是情况 4,$k$ 个满足 $f[v]\geq1$ 的点在 C_n 上且 $f[v_0]=-1$,至少有 $k+2$ 个 C_n 上的点满足 $f(v)\geq1$,$\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq k+2-1-(n-k-2)=2k-n+3\geq(4k-3n+5)/3$,故

$\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq(4k-3n+5)/3+1$,因当 n 为偶数时,$\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})$ 为奇数,故 $\gamma_{ks}^{-11}(W_{n+1})\geq(4k-3n+5)/3+2=4t-n+5$.

下面给出一个上界.

$k=3t$ 且 $4k/3<n$ 时,设 $f(v_{3i+1})=-1$,$f(v_{3i+2})=f(v_{3i+3})=1(0\leq i\leq t-1)$,$f(v_{3i+2})=1$,其余 $f(v)=-1$,此时 $f(W_{n+1})=t+1-(n-3t-2)=4t-n+3$.

$k=3t+1$ 且 $(4k+2)/3<n$ 时,

设 $f(v_{3i+1})=-1$,$f(v_{3i+2})=f(v_{3i+3})=1(0\leq i\leq1)$ 其余 $f(v)=-1$,此时 $f(W_{n+1})=t+1+1-(n-3t-3)=4t-n+5$

同理可证 n 为奇数时,结论也成立.

参考文献:

[1] E. J. Cockayne, C. M. Mynhartdt. On a generalization of signed dominating function of graphs [J]. Ars. Combin, 1996, (43): 235 - 245.

[2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. Domination in graphs [M]. NewYork: Marcel. Dekker. Inc, 1998. 95 ~ 105.

[3] 徐保根. 关于图的符号 k - 控制数 [J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(5): 145 - 148.

[4] BaogenXu. On minus domination and signed domination in graphs [J]. 数学研究与评论, 2003, 23(4): 586 - 590.

[5] BaogenXu. On signed edgedomination numbers of graphs [J]. Discrete Math, 2001, (239): 179 - 189.

On Signed k - subdomination Numbers of Graphs

YUAN Xiu - hua

(Mathematics Department, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract: Suppose $G(V,E)$ is a graph, k is a random positive integer less than $|G|$. If a function f: $V\{1,-1\}$ satisfy: there are at least k vertices satisfied with f $[v]$ 1, then f is a signed k - subdomination function of G. We denote the signed k - subdomination numbers by $\gamma_{ks}^{-11}(G)$, which is the minimum signed k - subdomination function of G. In this paper, we give a improved low bound of the signed k - subdomination number of a graph G, finally the signed k - subdomination numbers of wheels are determined.

Key words: signed k - subdomination function; signed k - subdomination numbers; wheels

(责任编辑: 周尚超)