

关于图的反符号星控制数

赵 华 徐保根 赵金凤 帅春萍

(华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 引入了图的反符号星控制的概念, 设 $G=(V, E)$ 是一个没有孤立点的图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{+1, -1\}$ 对一切点 $v \in V(G)$ 所在的星中的边 e 有 $\sum f(e) \leq 0$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个反符号星控制函数. 而 $\gamma'_{rs}(G) = \max\{\sum f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号星控制函数}\}$ 称为图 G 的反符号星控制数. 我们主要给出了图的反符号星控制数的上界, 并确定了完全图与完全二部图的反符号星控制数.

关键词: 反符号星控制函数; 反符号星控制数; 完全图; 完全二部图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1].

对于图 $G=(V, E)$, $v \in V(G)$, 则 v 点在 G 中的边邻域定义为 $E_G(v) = \{uv \in E \mid u \in V\}$. 若 $e \in E(G)$, 则 $N_G(e)$ 表示与 e 相邻的边的集合, 称为 e 的边邻域. $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$ 称为 e 的闭边邻域. 在不会混淆的情况下, $N_G(e)$ 和 $N_G[e]$ 分别简记为 $N(e)$ 和 $N[e]$. $E_G(v)$ 简记为 $E(v)$.

近几年来, 图的控制理论研究的内容越来越广泛, 各类控制概念相继产生, 研究成果不断丰富. 然而, 多数均属于图的点控制, 很少涉及图的边控制问题, 为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容, 我们已将图的点控制概念转向研究图的边控制问题, 并获得了初步的研究成果, 如符号边控制^[2], 符号星控制^[3], 符号团控制^[4]等. 但图的边控制中存在许多未解决的问题的猜想, 它们不仅与一些实际问题相联系(如局部占优设计问题等), 而且与某些特殊的符号边控制相关, 为此我们将引入图的反符号星控制概念.

对于一个实值函数 $f: E \rightarrow R$ 和一个子集 $S \subseteq E(G)$, 则记 $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$.

定义1 设 $G=(V, E)$ 是一个没有孤立点的图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{+1, -1\}$ 满足 $\sum_{e \in E(v)} f(e) \leq 0$ 对一切 $v \in V(G)$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个反符号星控制函数. 图 G 的反符号星控制数定义为

$$\gamma'_{rs}(G) = \max\left\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的反符号星控制函数}\right\}.$$

对于空图 $\bar{K}_n$, 则定义 $\gamma'_{rs}(\bar{K}_n) = 0$.

为了方便, 如果 f 为图 G 的一个反符号星控制函数, 则称满足 $f(e) = 1$ 的边 e 为 f 下的 $+1$ 边; 同样称满足 $f(e) = -1$ 的边 e 为 f 下的 -1 边.

由上述定义不难看出下面性质:

- (1) 对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2 均有 $\gamma'_{rs}(G_1 \cup G_2) = \gamma'_{rs}(G_1) + \gamma'_{rs}(G_2)$;
- (2) 对于任意一个图 G 均有 $\gamma'_{rs}(G) \equiv |E(G)| \pmod{2}$.

收稿日期: 2008-06-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10661007)

作者简介: 赵 华(1984-), 女, 陕西榆林人, 硕士研究生, 研究方向为运筹学与控制论.

1 反符号星控制数的界限

由定义看出 $\gamma'_{rss}(G) \geq -|E(G)|$ 是平凡的下界, 并且有

引理 2 对于任意连通图 G $\gamma'_{rss}(G) = -|E(G)|$ 当且仅当图 G 为星图.

证明 $\gamma'_{rss}(G) = -|E(G)|$ 成立 $\Leftrightarrow$ 对图 G 的任意一个反符号星控制函数 f 及图 G 的每条边 e 均有 $f(e) = -1$, 这等价于图 G 的每条边均为悬挂边, 即为星图. 证毕.

定理 3 对于任意 n 阶图 G , 若 $\delta(G) \geq 1$, 则有 $\gamma'_{rss}(G) \leq 0$, 且当图 G 为偶圈时有 $\gamma'_{rss}(G) = 0$.

证明 设 f 为图 G 的一个反符号星控制函数, 且使得 $\gamma'_{rss}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$, 由于

$$\sum_{e \in E(G)} f(e) = (1/2) \sum_{v \in V(G)} \sum_{e \in E(v)} f(e) \leq (1/2) \sum_{v \in V(G)} 0 = 0,$$

因此 $\gamma'_{rss}(G) \leq 0$.

下面定义偶圈的一个反符号星控制函数 f 使得 $\gamma'_{rss}(G) = 0$. 只需将偶圈的边交替地定义 f 的值为 $+1$ 和 -1 即可.

定理 4 对于每个顶点的度均为奇数的图 G (可知 n 为偶数), 则有 $\gamma'_{rss}(G) \leq -n/2$, 且此上界是最好可能的.

证明 设 f 为图 G 的一个反符号星控制函数, 且使得 $\gamma'_{rss}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$, 由于

$$\sum_{e \in E(G)} f(e) = (1/2) \sum_{v \in V(G)} \sum_{e \in E(v)} f(e) \leq 1/2 \sum_{v \in V(G)} (-1) = -n/2,$$

并且注意到 $\gamma'_{rss}(G)$ 是一个整数, 因此 $\gamma'_{rss}(G) \leq -n/2$.

对于任意给定一个图 G_0 , 在 G_0 的每一个顶点 v 处恰好增加 $d_{G_0}(v) + 1$ 条悬挂边所得的图记为 G , 此时图 G 的每个顶点的度仍为奇数. 在 $E(G)$ 上定义一个双值函数 f 如下: 当 $e \in E(G_0)$ 时 $f(e) = 1$; 当 $e \in E(G) \setminus E(G_0)$ 时 $f(e) = -1$.

不难验证 f 为图 G 的一个反符号星控制函数, 且 $\sum_{e \in E(v)} f(e) = -1$ 对每个顶点 $v \in V(G)$ 成立, 即有 $\gamma'_{rss}(G) \geq \sum_{e \in E(G)} f(e) = -n/2$. 因此 $\gamma'_{rss}(G) = -n/2$. 证毕.

2 特殊图的反符号星控制数

下面确定完全图的反符号星控制数.

引理 5^[5]

(1) 偶数阶完全图 K_{2n} 是一个 1 因子和 $n-1$ 个生成圈的和;

(2) 奇数阶完全图 K_{2n+1} 是 n 个生成圈的和.

定理 6 设 K_n 为 n 阶完全图, 则

(1) 当 n 为偶数时 $\gamma'_{rss}(K_n) = -n/2$;

(2) 当 n 为奇数时 $\gamma'_{rss}(K_n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ 时;} \\ -1, & \text{当 } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ 时.} \end{cases}$

证明 (1) 当 n 为偶数时 K_n 的每个顶点的度均为奇数, 由定理 4 知 $\gamma'_{rss}(K_n) \leq -n/2$. 另一方面, 根据引理 5 得 K_n 是一个 1 因子和 $n/2 - 1$ 个生成圈的和, 定义 K_n 的一个反符号星控制函数 f 如下: 对于这个 1 因子的每一条边 e , 定义 $f(e) = -1$ (注意到 1 因子包含 $n/2$ 条边); 对于这 $n/2 - 1$ 个生成圈的每一个生成圈 (注意到 n 为偶数) 的边 f 的值交错地定义为 1 和 -1 . 可见 $\gamma'_{rss}(K_n) \geq \sum_{e \in E(K_n)} f(e) = -n/2$. 因此, 当 n 为偶数时 $\gamma'_{rss}(K_n) = -n/2$.

(2) 当 n 为奇数时, 对于每一点 $v \in V(K_n)$ 和 K_n 的每一个反符号星控制函数 f , 由于 $d(v) = n-1$ 为偶数, 从而 $\sum_{e \in E(v)} f(e) \leq 0$ 且为负偶数. 由定理 3 知 $\gamma'_{rss}(K_n) \leq 0$ 对于 K_n 的每一个反符号星控制函数 f 成立.

另一方面, 根据引理 5 得 K_n 是 $m = (n-1)/2$ 个生成圈的和, 记这些生成圈为 $C_n^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, m$, 记 $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 注意到 n 为奇数, 定义 f 如下:

当 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 则生成圈的个数 $m = (n-1)/2$ 为偶数, 定义 $m/2$ 个生成圈的每条边均为 1, 另 $m/2$

个生成圈的每条边均为 -1 , 即有 $\sum_{e \in E(v_i)} f(e) = 0$ 对 K_n 的每个点 $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 成立, 所以 f 为 K_n 的一个反符号星控制函数, 并且 $\sum_{e \in E(K_n)} f(e) = 0$, 从而 $\gamma'_{\text{rss}}(K_n) \geq 0$. 因此, 当 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 时 $\gamma'_{\text{rss}}(K_n) = 0$.

当 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 生成圈的个数 $m = (n-1)/2$ 为奇数, 定义 $(m-1)/2$ 个生成圈的每条边均为 1 , 另外 $(m-1)/2$ 个生成圈的每条边均为 -1 , 对于最后一个生成圈的每条边, 交错地定义 f 的值为 -1 和 1 , 由于其为奇圈, 则 K_n 中只存在一个点 $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 使得 $\sum_{e \in E(v_i)} f(e) = -2$, 其余 $n-1$ 个点 v_i 有 $\sum_{e \in E(v_i)} f(e) = 0$ 成立, 所以 f 为 K_n 的一个反符号星控制函数, 并且 $\sum_{e \in E(K_n)} f(e) = 1/2 \sum_{v \in V(K_n)} \sum_{e \in E(v)} f(e) = (1/2)(-2 + 0) = -1$, 从而 $-1 \leq \gamma'_{\text{rss}}(K_n) \leq 0$. 又因为当 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 时, $|E(K_n)|$ 为奇数, 由性质(2)知 $\gamma'_{\text{rss}}(K_n) = -1$. 证毕.

下面确定完全二部图的反符号星控制数.

引理 7^[6] 每个偶度二部图的边可分拆成若干偶圈之并.

定理 8 设 m 和 n 均为正整数且 $m \geq n \geq 1$, 则

$$\gamma'_{\text{rss}}(K_{m,n}) = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \text{ 和 } n \text{ 均为偶数时;} \\ -m, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \\ -n, & \text{当 } m \text{ 为奇数 } n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

证明 令 $V = V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$, $E = E(K_{m,n})$, 其中

$$V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m\}, V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

情况 1 当 m 和 n 均为偶数时; $K_{m,n}$ 为一个偶度二部图, 由引理 7 知 $K_{m,n}$ 可分拆成若干偶圈之并, 对于每个偶圈的边交替地定义 f 的值为 $+1$ 和 -1 , 则有 $\sum_{e \in E(v)} f(e) = 0$ 对 $K_{m,n}$ 中的每一个点均成立, 所以 f 为 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数且有 $\gamma'_{\text{rss}}(K_{m,n}) = \sum_{e \in E} f(e) = 0$.

情况 2 当 n 均为奇数时; 若 $n = 1$ 时, 定理显然成立, 下设 $n \geq 2$.

设 f 为 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数, 且使得 $\gamma'_{\text{rss}}(K_{m,n}) = \sum_{e \in E} f(e)$. 由于 n 为奇数, 所以对于每个 $v \in V_1$, 均有 $\sum_{e \in E(v)} f(e) \leq -1$, 故

$$\gamma'_{\text{rss}}(K_{m,n}) = \sum_{e \in E} f(e) = \sum_{v \in V_1} \sum_{e \in E(v)} f(e) \leq \sum_{v \in V_1} (-1) = -m.$$

下面定义 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数 f 使得 $\sum_{e \in E} f(e) = -m$ 即可.

(1) 当 m 为奇数时; 令 $M = \{u_i v_i, u_i v_n \mid i = 1, 2, \dots, n, j = n+1, n+2, \dots, m\}$, $G_1 = K_{m,n} - M$ 为一个偶度二部图, 由引理 7 知 $E(G_1)$ 可分拆成若干偶圈之并, 对于每个偶圈的边交替地定义 f 的值为 $+1$ 和 -1 ; 而当 $e \in M$ 时定义 $f(e) = -1$. 不难验证 f 为 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数且有 $\sum_{e \in E} f(e) = -|M| = -m$.

(2) 当 m 为偶数时; 令 $K_{m,n-1} = K_{m,n} - v_n$, 记 $E_1 = E(K_{m,n-1})$. 由情况 1 知存在 $K_{m,n-1}$ 的一个反符号星控制函数 f_1 使得 $\sum_{e \in E_1} f_1(e) = 0$. 定义 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数 f 如下

$$f(e) = \begin{cases} f_1(e), & e \in E_1; \\ -1, & e = u_i v_n (1 \leq i \leq m). \end{cases}$$

可见 $\sum_{e \in E} f(e) = 0 + (-m) = -m$.

情况 3 当 m 为奇数 n 为偶数时; 与情况 2 类似, 设 f 为 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数, 且使得 $\gamma'_{\text{rss}}(K_{m,n}) = \sum_{e \in E} f(e)$. 由于 m 为奇数, 所以对于每个 $v \in V_2$ 均有 $\sum_{e \in E(v)} f(e) \leq -1$, 故 $\gamma'_{\text{rss}}(K_{m,n}) = \sum_{e \in E} f(e) = \sum_{v \in V_2} \sum_{e \in E(v)} f(e) \leq \sum_{v \in V_2} (-1) = -n$. 下面定义 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数 f 使得 $\sum_{e \in E} f(e) = -n$ 即可.

令 $K_{m-1,n} = K_{m,n} - u_m$, 记 $E_1 = E(K_{m-1,n})$. 由情况 1 知存在 $K_{m-1,n}$ 的一个反符号星控制函数 f_1 使得 $\sum_{e \in E_1} f_1(e) = 0$. 定义 $K_{m,n}$ 的一个反符号星控制函数 f 如下:

$$f(e) = \begin{cases} f_1(e), & e \in E_1 \\ -1, & e = u_m v_i (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

可见 $\sum_{e \in E} f(e) = 0 + (-n) = -n$.

(下转第 102 页)

com 2006-07-11.

[3] 驻韩经商参处. 2006 年韩国进出口情况展望 [EB/OL]. www.mofcom.gov.cn 2006-06-29.

[4] 驻韩经商参处. 韩国主要税制情况简述 [EB/OL]. www.mofcom.gov.cn 2006-05-11.

[5] 予 文. 韩国“官民银”联手开辟海外建设市场 [J]. 国际工程与劳务 2006 227(4): 22-23.

An Analysis of China's Adverse Balance in China - Korea Trade

ZHU Qi - heng

(School of Economic Management ,East China Jiaotong University ,Nanchang 330013 China)

Abstract: The basic status of China - Korea trade is that there is vast China's adverse balance ,which exceeds the export amount of Korea in some years. The causes of China's adverse balance include the adjustment of Korea's trade policy and tactics ,the two different functions of Korea government in China - Korea trade; the differences between two countries' economy development; the Korea culture accepted by Chinese; the lack in Chinese recognition about the importance of Korea market etc. The tactics to decrease China's adverse balance mainly include strengthening bilateral consultation; reforming direct investment structure; speeding up adjustment of export commodity structure; enlarging culture product export to Korea and driving other related export industries development.

Key words: China - Korea trade; China's adverse balance; distinguish and analysis; cause; tactics

(责任编辑: 刘棉玲)

(上接第 83 页)

参考文献:

[1] J. A. Bondy ,V. S. R. Murty. Graph theory with applications [M]. Amsterdam: Elsevier ,1976.

[2] Baogen Xu. On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math. 2001 239: 179-189.

[3] 徐保根. 关于图的符号星控制数 [J]. 华东交通大学学报 2004 21(4): 116-118.

[4] 徐保根. 关于图的团符号控制数 [J]. 系统科学与数学 2008 28(3): 282-287.

[5] 徐保根. 图的控制理论 [M]. 北京: 科学出版社 2008.

[6] 徐保根. 两类图的符号星控制数 [J]. 华东交通大学学报. 2005 22(4): 146-148.

On Reverse Signed Star Domination in Graphs

ZHAO Hua ,XU Bao - gen ,ZHAO Jin - feng ,SHUAI Chun - ping

(School of Basic Sciences ,East China Jiaotong University ,Nanchang 330013 ,China)

Abstract: We introduce the concept of reverse signed star domination in graphs. Let $G = (V, E)$ be a graph without isolated vertices. A function $f: E \rightarrow \{+1, -1\}$ is said to be a reverse signed star domination function (RSSDF) of G if $\sum f(e) \leq 0$ holds for every $v \in V(G)$, where e is the edge of the star which v belongs to, and $\gamma'_{rss}(G) = \max\{\sum f(e) \mid f \text{ is an RSSDF of } G, e \in E(G)\}$ is called the reverse signed star domination number of G . We obtain the upper bound of $\gamma'_{rss}(G)$ for general graphs G and determine the exact values of reverse signed star domination number for Complete graph and Complete bipartite graph.

Key words: reverse signed star domination function; reverse signed star domination number; complete graph; complete bipartite graph

(责任编辑: 周尚超)